中微笔记

zdd

2024 年 12 月 25 日

写在前面

中微一点儿也不数学！

本笔记偏向语文（雾），写给具备高等数学基础知识的读者，因此不会赘述一些简单的数学知识。这包括：多元函数的偏导、隐函数定理、拉格朗日乘数法、全序集、Zorn 引理。同时本文仅作为笔者临考抱佛脚的复习，不会写过多的动机，之后有空也许会补，见谅。

偏好(preferences)表示一个人在两个选项之间的首选。

- 苏打水比啤酒更受欢迎(is preferred to)：苏打水 $\succ$ 啤酒
- 苏打水和啤酒一样好(is indifferent to)：苏打水 $\sim$ 啤酒
- 若两者同时满足，称苏打水不比啤酒差(is weakly preferred to)：苏打水$\succeq$啤酒

而后自然是在商品集合 X 上定义一个人的偏好对应的全序集，由 Zorn 引理我们一定能得到这个人最喜欢的东西。

效用函数(Utility function) $u : X \to \mathbb{R}$ 将上述的偏好具象化，对于 $x, y \in X$，$x \succeq y$ 当且仅当 $u(x) \geq u(y)$。当然这样的 u 有无穷多种，我们应当如何选取效用函数呢？

理性行为(Rational behavior)：在一系列负担得起的选择中实现效用最大化的行为。即无论使用哪个效用函数来表示 $\succeq$，最理想的选项是相同的。

此时我们就可以将理性行为表述为约束优化问题。将理性应用于消费者行为，我们的目标是推导出需求函数，以描述商品的消费将如何随着价格变化而变化。具体来说，固定总的效用函数 u 的取值，考虑此时两种（多种）商品消费的多少，这条曲线被称为**无差异曲线(indifference curves)**下面我们考虑四种情形：

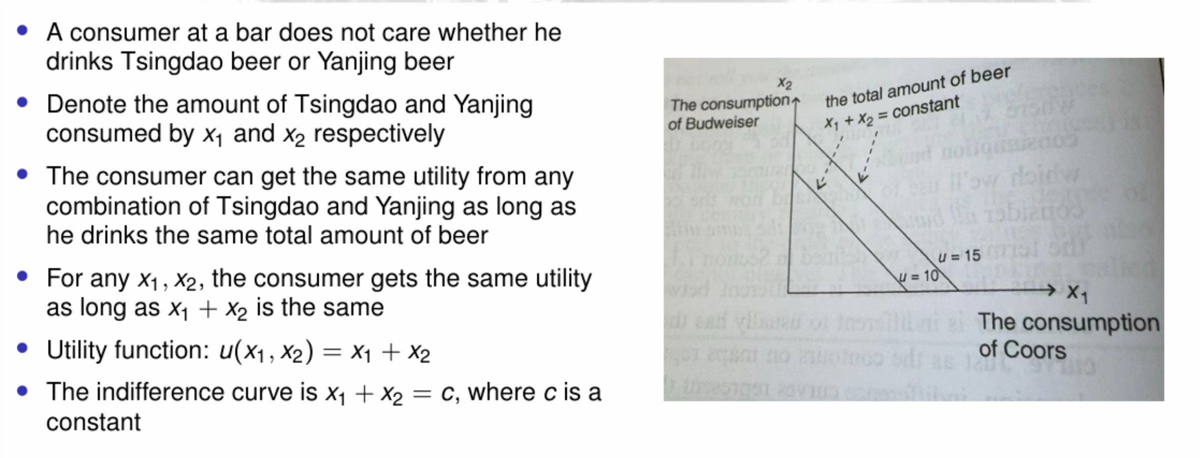

图 1: 完美替代(perfect substitutes)

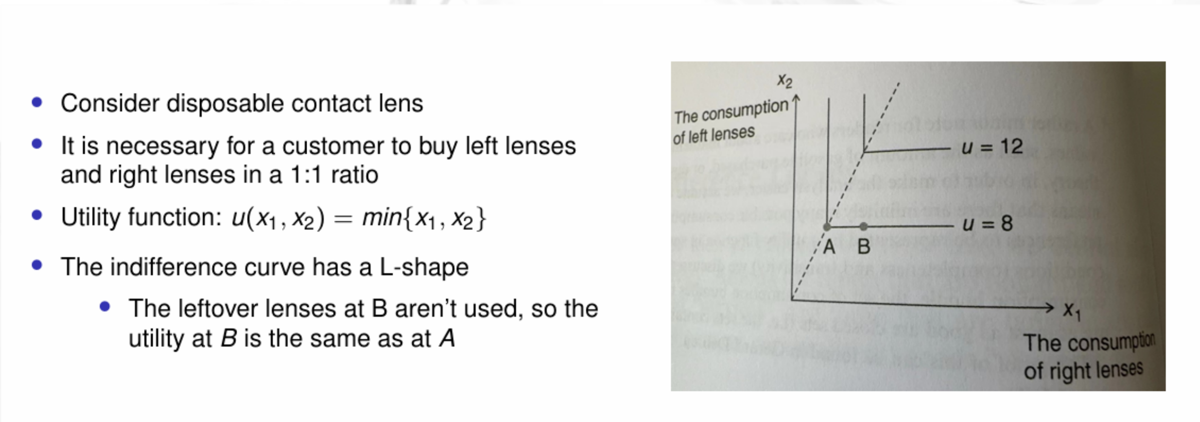

图 2: 完美补充(perfect complements)

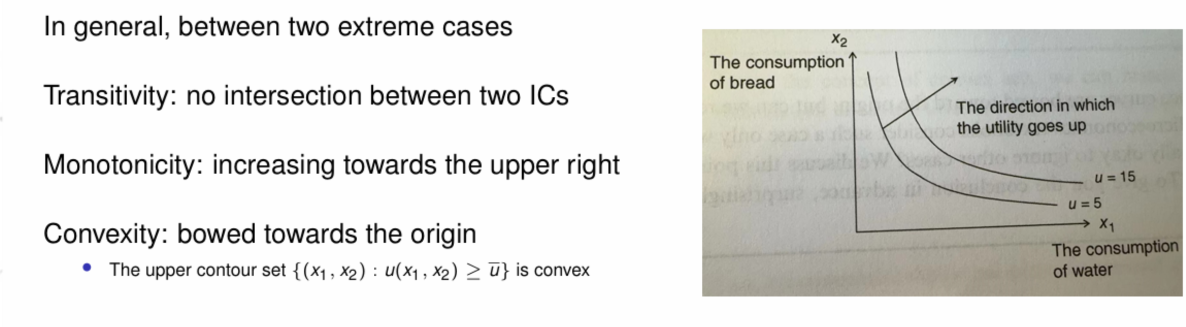

图 3: 一般情况

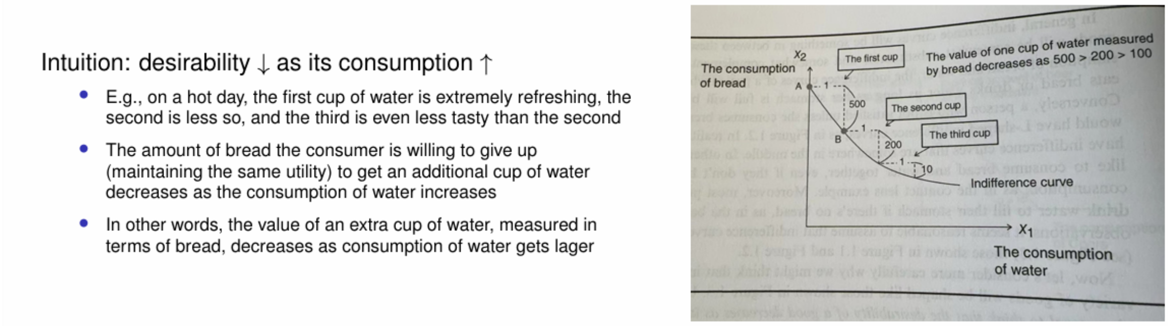

图 4: 凸性

边际替代率(Marginal rate of substitution)为无差异曲线的斜率。具体而言，消费者愿意放弃的第二种商品的最大数量，以便将第一种商品的消费量增加一个单位，并保持效用固定。记为 MRS_{12}。

边际替代率递减定律：弓形无差异曲线。

预算限制(budget constraint)就是总价格不超过预算（中微到底在干什么）：$\sum p_i x_i \leq I$。所谓**最佳捆绑消费(the optimal consumption bundle)**下图可以看的很清楚。

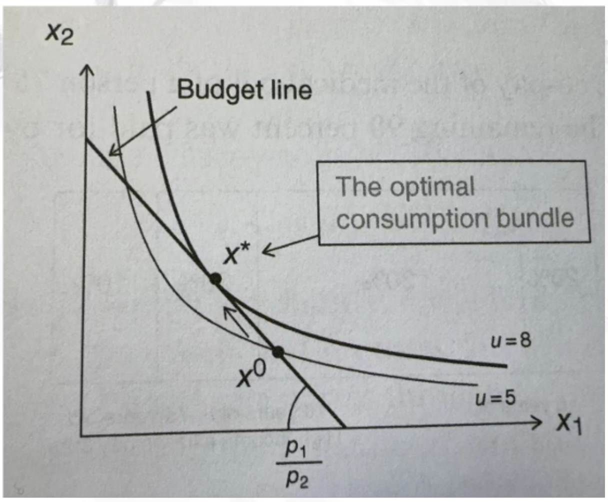

图 5: 最佳捆绑消费

定义商品 i 的效用：

$$MU_i : \frac{\partial u(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial x_i}$$

由微积分里的知识我们有

$$\Delta u \sim \sum \frac{\partial u}{\partial x_i} \Delta x_i$$

回忆边际替代率的定义，结合 $\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2$，我们有

$$MRS_{12} = -\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1}\Big|_{\text{u is constant}} = \frac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_2}$$

显然在最佳捆绑消费时 $MRS_{12} = \frac{p_1}{p_2}$，这可以写成

$$\frac{\partial u/\partial x_1}{p_1} = \frac{\partial u/\partial x_2}{p_2}$$

更一般的，我们有

$$\frac{\partial u/\partial x_1}{p_1} = \cdots = \frac{\partial u/\partial x_N}{p_N} = \lambda$$

其中 λ 代表收入的边际效用，具体来说，假设消费者选择最优消费捆绑，收入增加 1 时的额外效用金额为 λ，这种效用的增加并不取决于额外收入的用途。

回忆拉格朗日乘数法

$$\mathcal{L}(x_1, \cdots, x_N, \lambda) = u(x_1, \cdots, x_N) + \lambda(I - p_1x_1 - \cdots - p_Nx_N)$$

中的 λ 恰为上文中定义的收入的边际效用，即

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial I}\Big|_{x^*} = \lambda$$

上式称为**包络定理(Envelope Theorem)**（哦哦牛批这还能取个名字的）。

对于给定的 (p, I)，效用函数在 $x^*(p, I)$ 处取最值：

$$u(x_1^*(p, I), x_2^*(p, I), \cdots, x_N^*(p, I)) = V(p, I)$$

$x^*(p, I)$ 称为**需求函数(Demand function)**。我们有**罗尔恒等式(Roy's identity)**：

$$x_i^* = -\frac{\partial V(p, I)/\partial p_i}{\partial V(p, I)/\partial I}$$

需求定律(Law of Demand)（这不是废话吗）：对于几乎所有商品，对商品的需求都会随着价格的上涨而减少

$$\frac{\partial x^*(p, I)}{\partial p_i} < 0$$

例外：

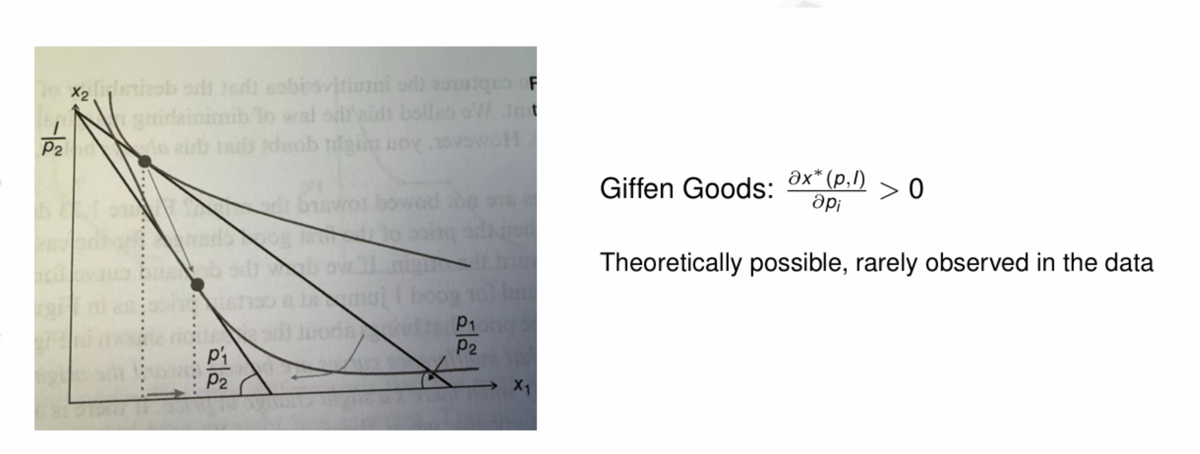

图 6: 吉芬商品

补偿需求函数 $\bar{x}$ 是支出最小化问题的解决方案：

$$\min_x px = p_1x_1 + \cdots + p_Nx_N \text{ s.t. } u(x) = u$$

若 $\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial p_j} > 0$ 则称商品 i 和商品 j 是**替代品(substitutes)**，若 $\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial p_j} < 0$ 则称商品 i 和商品 j 是**互补品(substitutes)**。当 $N = 2$ 时，若 $\frac{\partial \bar{x}_1}{\partial p_2} = \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial p_1} = 0$，则称商品 i 和商品 j 是**互补品(substitutes)**。

Shephard's Lemma：

$$\frac{\partial I(p,u)}{\partial p_i} = \bar{x}_i(p,u)$$

替代效应(Substitution effects)：价格上涨导致消费者转向类似商品，补偿需求功能提供了衡量“相似性”的工具。

收入效应(Income effects)：价格上涨“有效”减少了消费者的收入，它降低了购买所有商品的能力。

Slutsky 分解(The Slutsky decomposition)将替代效应和收入效应放在一起：

$$\frac{x_i}{p_i} = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial p_i} - \frac{\partial x_i}{\partial I} x_i$$

价格弹性(Price elasticity)：价格上涨 1 份时需求减少的份数

$$\frac{-\Delta x_i / x_i}{\Delta p_i / p_i} = -\frac{\Delta x_i}{\Delta p_i} \frac{p_i}{x_i}$$

当 $\Delta p \to 0$ 时，价格弹性为

$$\varepsilon_i^D = -\frac{\mathrm{d}x_i / x_i}{\mathrm{d}p_i / p_i} = -\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}p_i} \frac{p_i}{x_i}$$

需求的交叉价格弹性：

$$\varepsilon_{ij}^D = -\frac{\mathrm{d}x_i / x_i}{\mathrm{d}p_j / p_j}$$

考虑价格变动对收入的影响：

$$\frac{dpx}{dp} = x + p\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} = x\left(1 + \frac{p}{x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p}\right) = x\left(1 - \varepsilon^D\right)$$

- 收入随价格增加，若 $\varepsilon^D < 1$

- 收入不随价格变化，若 $\varepsilon^D = 1$
- 收入随价格减少，若 $\varepsilon^D > 1$

在效用最大化下，补偿需求的价格导数是对称的：

$$\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial p_j} = \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial p_i}$$

完全竞争假设(Perfect competition assumption)：如果单个生产者改变其生产，则由市场决定的价格不会改变，因为生产者众多。即在利润最大化问题

$$\max_{L \geq 0} pf(L) - wL$$

中 p 和 w 是常数

成本函数(cost function)：$C(y)$

AC(Average cost)：$\frac{C(y)}{y}$

MC(Marginal cost)：$C'(y)$

AVC：广义平均可变成本

Firm behavior 大概就是说一些生产行为需要一定的“启动资金”，抽象废话一堆。

考虑公司使用两个投入生产产出 y：劳动力 L 和资本 K

- 劳动力：短期可调整投入
- 资本：长期可调整投入

长期生产函数：$y = f(L, K)$，短期生产函数可以写成 $y = f(L) = f(L, \bar{K})$

将输入翻 $t(> 1)$ 倍：

- **恒定规模回报(CRS)**：$y(tL, tK) = ty(L, K)$，一些重复劳动，如农业生产，纺织，理发店。
- **上升规模回报**：$y(tL, tK) > ty(L, K)$，理论上不存在，往往表明有隐含成本。
- **下降规模回报**：$y(tL, tK) < ty(L, K)$，规模提升效率随之提升，如物流、电信、输电，这会导致垄断。

以劳动力和资本为投入的企业利润最大化问题：

$$\pi(L, K; p, w, r) = \max_{L,K} pF(L, K) - (wL + rK)$$

同上定义完全竞争假设：无论企业选择什么 L 和 K，p、w、r 都是固定不变的参数。

租赁资本假设(Leased capital assumption)

- 一旦购买了机械，就可以多次使用
- 购买价格不适合单期利润最大化
- 假设公司每期都以 r 率租用资本

由一阶条件我们有

$$p\frac{\partial F}{\partial L} = w, p\frac{\partial F}{\partial K} = r$$

进而
$$\frac{\partial F/\partial L}{\partial F/\partial K} = MRTS_{LK} = \frac{w}{r}$$
于是我们可以通过比较 $MRTS_{LK}$ 与 $\frac{w}{r}$ 的大小来判断如何调整劳动力与资本以获得最高利润。而 $MRTS_{LK} = \frac{w}{r}$ 的 F 当然是下最优化问题的解：

$$\min_{L,K} wL + rK \text{ s.t. } F(L,K) = y$$

长期总成本(LTC)曲线为所有短期成本曲线的包络

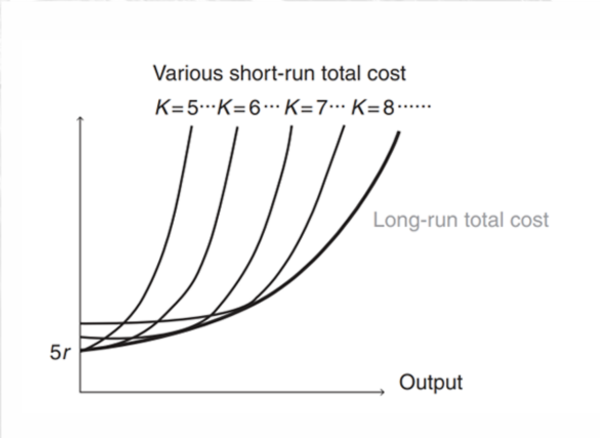

图 7: LTC 曲线

长期平均成本(LAC)曲线为所有短期平均成本成本曲线的包络

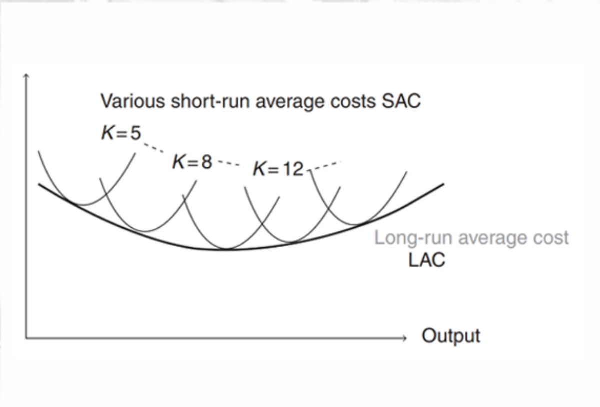

图 8: LAC 曲线

考虑多个输入、输出的情形，对于生产计划 y，利润可以写成

$$py = p_1 y_1 + \cdots + p_N y_N$$

这里 y_k 的正负由它是输入还是输出决定。记号变为(抽象废话)

$$\max_{y \in Y} py \text{ s.t. } y \in Y$$

该问题最优解记为 $y^*(p)$。

供给定律(Law of Supply)：供给曲线必然向上倾斜。如果一种产出的价格上涨，那么该产出的产量要么增加，要么保持不变。

市场需求是所有个体需求曲线的横向总和：

$$D(P) = D^1(P) + \cdots + D^n(P)$$

市场供给是所有单独供给曲线的水平总和：

$$S(P) = S^1(P) + \cdots + S^n(P)$$

消费者剩余(CS)：消费者从市场交易中获得的利益（以美元计）。

个人需求：个人可以购买多件商品，且对不同数量商品有对应的的支付意愿（WTP），如果 $WTP > p$，则购买之。此时 $CS =$ 所有交易的$(WTP - p)$总和。另一种解释：每个人最多只能购买一种商品，每个人的 WTP 是不同的，需求者按 WTP 从高到低的顺序排列，如果 $WTP > p$，则购买，此时 $CS =$ 所有参与交易的个人的$(WTP - p)$之和。**若购买量是连续的，则将求和改为积分即可。**

上段分析的漏洞在于**需求并不能衡量 WTP，且忽略了收入效应带来的效用变化**。

准线性效用 CS 可准确衡量消费者从市场交易中获得的利益：

$$V(Q, m) = U(Q) + m$$

其中 Q 代表消耗的可乐升数，m 代表优化消费其他商品的剩余资金，$U(Q)$ 代表消费 Q 升可乐的效用，$U(Q)'' < 0$，此时我们通常假设有足够的收入，以排除边界解。

在准线性效用条件下，收入效应为零。

准线性效用下的最优消费

$$P = U'(Q)$$

需求代表相关商品的边际效用 $U'(Q)$。$U'(Q)$衡量消费者对额外一升可乐的 WTP：

$$WTP = -\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}Q} = \frac{\partial V/\partial Q}{\partial V/\partial m} = U'(Q)$$

此时 WTP 体现为在效用固定的情况下，消费者愿意为多买一单位可乐而放弃的最大数量。如果当前消费水平下 $U'(Q) = 2$ 美元，那么如果消费者再喝一罐可乐，她的收入就会增加 2 美元。

局部均衡侧重于一个市场，但往往存在跨市场的溢出效应。一种商品的价格上涨不仅会影响其自身的消费，还会影响其替代品和互补品的市场。**一般均衡**将生产所有商品的所有企业和所有消费者整合到一个模型中，这里的商品既可以是其他企业的投入品，也可以是消费者的最终产品，消费者也可以是生产的劳动力投入者。

考虑如下模型：商品 $n = 1, 2, \cdots, N$，价格 $p = (p_1, \cdots, p_N)$，企业 $j = 1, 2, \cdots, J$，生产计划：$y^j = (y_1^j, y_2^j, \cdots, y_N^j)$，这里如果 n 是产出，则 $y_n^j > 0$，否则 $y_n^j < 0$，生产可能性集 Y^j：所有可行的生产计划。此时利润最大化问题转化为

$$\max py^j \text{ s.t. } y^j \in Y^j$$

公司 j 的最优生产计划记作 $y^j(p)$。

现有消费者 $i = 1, 2, \cdots, I$，商品初始储量 $w^i = (w_1^i, \cdots, w_N^i)$，企业 j 的利润分配给家庭 i θ_{ij}

份，$\sum_i \theta_{ij} = 1$，捆绑消费组合 $x^i = (x_1^i, \cdots, x_N^i)$，则预算约束为

$$px^i = pw^i + \sum_j \theta_{ij} p y^j(p)$$

效用最大化问题转化为：

$$\max_{x^i} u^i(x^i) \text{ s.t. } px^i = pw^i + \sum_j \theta_{ij} p y^j(p)$$

消费者 i 的最佳捆绑消费组合记作 $x^i(p)$。

于是整个经济系统可以被描述为

$$\{u^i, w^i, Y^j, \theta^{ij}\}_{i=1,j=1}^{I,J}$$

经济均衡包括一组关于价格 p 与资源分配 $x^i(p), y^j(p)$，使得：

- 给定价格 p，$x^i(p)$ 解决消费者 i 的效用最大化问题。
- 给定价格 p，$y^j(p)$ 解决生产者 j 的利润最大化问题。
- p 平衡市场需求和市场供给

$$\sum_i x_n^i(p) = \sum_j y_n^j(p) + \sum_i w_n^i \text{ for } n = 1, 2, \cdots, N$$

或者

$$x_n(p) = y_n(p) + w_n$$

那么这样的均衡一定存在吗？考虑**超额需求函数**

$$z_n(p) = x_n(p) - y_n(p) - w_n(p)$$

$z_n > 0$ 表示供不应求，反之为供过于求。

Walras's Law：对所有价格 p 与超额需求函数 $z_n(p)$，我们有 $pz_n(p) = 0$。

当所有价格都是正数时（没有商品是“免费”的），该定律意味着：一个市场的需求过剩意味着另一个市场的供给过剩；如果 N 个市场中的 $N-1$ 个处于均衡状态，那么剩下的市场也一定处于均衡状态。

由 Brouwer 不动点定理，当 $z_n(p)$ 关于 p 连续时，经济均衡一定存在。具体证明不赘述。

Pareto 改进：不损害任何人，但至少使一人受益。

Pareto 效率：没有 Pareto 改进。

考虑两个消费者与两种商品组成的市场经济，可以遇见的，处于市场均衡状态时，两者的无差别曲线相切。

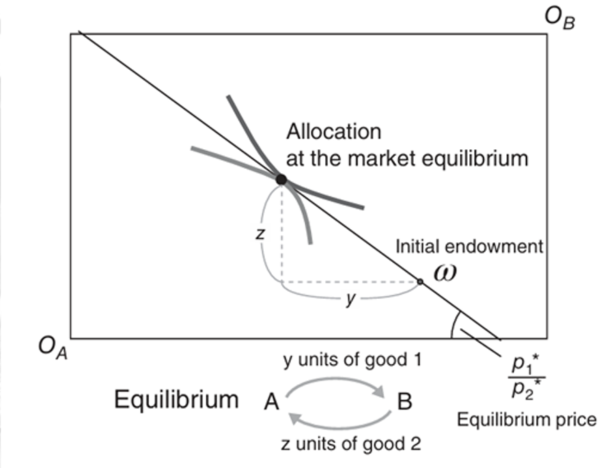

图 9: 市场均衡

福利经济学第一基本定理：完全竞争市场均衡总是在满足如下条件下实现资源的 Pareto 效率配置。条件：每个消费者都有一种商品，其消费可以连续变化，而且消费的增加会增加效用（局部非饱和）。

福利经济学第二基本定理：任何具有 Pareto 效率的资源配置都可以通过完全竞争的市场均衡来实现，在某些条件下，通过使用一次总付税和一次总付补贴来重新分配收入，可以实现完全竞争的市场均衡。条件：在其他技术条件中，主要条件有每个消费者的无差异曲线都向原点弯曲，每个企业的生产可能性集都是凸的。

称分配 $a=(x^1,\cdots,x^I,y^1,\cdots,y^J)$ 是**可行的**，若对任意 i,j 都有

$$\sum_i x^i \le \sum_i w^i + \sum_j y^j \text{ 且 } y^j \in Y^j$$

称从一种可行的分配 a 转移到另一种分配 $\bar{a}$ 是一种 **Pareto 改进**，如果 $u(\bar{x}^i) \ge u(x^i), \forall i$ 且 $u(\bar{x}^i) > u(x^i), \exists i$。

称一种分配 a 是 **Pareto 效率**的，若 a 是可行的且没有 Pareto 改进。

效率条件：对任意 Pareto 效率，存在 $p_1,\cdots,p_k$ 满足：

- 对任意消费者 i 与商品 a,b：
$$MRS^i_{ab}=\frac{p_a}{p_b}$$
- 对将商品 h 加工为 k 的工厂 j：
$$p_k\frac{\partial F^j}{\partial x_h}=p_h$$

这里 $p_1,\cdots,p_k$ 称为**影子价格**。可以推得如下结论：对生产商品 a 的工厂 α 与生产商品 b 的工厂 β，均使用同样的输入商品 h，有

$$MRT_{ab}=\frac{\partial F^\alpha_b/\partial x_h}{\partial F^\beta_a/\partial x_n}=\frac{p_a}{p_b}=MRS_{ab}$$

这里 MRT_{ab} 称为**边际转化率**。

在完全竞争条件下，企业是“价格接受者”。实际上，大多数市场都处于不完全竞争状态，少数企业可以掌握定价（市场）权力。**垄断**是指市场上只有一家生产商，垄断企业可以通过改变其

产出水平来影响市场价格，可以预测垄断者会做什么，只需优化即可。**寡头垄断**描述的是企业数量较少的不完全竞争市场，优化不足以预测企业在寡头垄断中的行为。需要博弈论来预测会发生什么。总的来说，**市场结构决定商品供应**。

在完全竞争市场中，单个企业面临一条水平的需求曲线。如果单个企业将其价格提高到高于当时的市场水平，则需求降至零；当单个企业将其价格降低到现行市场水平以下时，需求扩大到无穷大。原因在于存在无数个相互竞争的生产者和无数个消费者。

而垄断企业面临一条向下倾斜的需求曲线，要生产更多的产品并在市场上销售，就必须降低价格。垄断者只能收取单一价格（我们假设为单一价格）。降低的价格适用于边际消费者和次边际消费者。垄断者可以通过选择产量 Q 来决定市场价格 P。

当利润最大化时，$MR(Q)=MC(Q)$。在完全竞争市场中，$MR(Q)=P$，与 Q 无关。而对于垄断者而言，

$$MR(Q)=P+\frac{\partial P}{\partial Q}Q$$

垄断者通过需求弹性定价

$$\frac{P-MR}{P}=\frac{1}{\varepsilon}$$

垄断市场与完全竞争市场相比产出较低，价格较高，且不平等：生产者获得更多利润，而消费者剩余较少。固定成本巨大的行业更有可能是垄断行业，固定成本过高的市场被称为**自然垄断市场**，例如电力公司。建造水电站大坝或核反应堆的固定成本巨大。监管平衡了技术效率与市场支配力之间的权衡。一种解决方案是允许垄断，但实行价格监管。

博弈论：一种考虑如何预测他人的信念并进而预测其决定的理论。

同时决策：每个人同时做出决定，且做决定时不观察对手的决定。

博弈：玩家 $i=1,\cdots,N$ 为博弈的参与者，决策 $a_i\in A_i$ 根据游戏中迄今为止发生的情况制定的行动计划，回报 $g_i(a_1,\cdots,a_N)$。

纳什均衡是博弈中最常见、最基本的解法：对决策 $a=(a_1,\cdots,a_N)$，玩家 i 对决策 $a^*=(a_1^*,\cdots,a_n^*)$ 的**单方面偏离**是

$$(a_i,a_{-i}^*)=(a_1^*,\cdots,a_i,\cdots,a_n^*)$$

一个决策 a^* 是纳什均衡的若对任意 i 与 a_i，

$$g(a^*)\geq g(a_i,a_{-i}^*)$$

最佳决策：从信念到决策的映射，通过最优化问题得到：

$$BR(a_{-i})=\arg\max_{a_i} g_i(a_i,a_{-i})$$

纳什均衡有两个假设条件：

- 理性：给定信念的最佳反应
- 一致性：信念与实际行动一致

一个人效用函数的**曲率**体现了他对风险的看法。

纳什均衡的存在性：对于任何具有有限数量博弈者的博弈，每个博弈者都有有限数量的纯策略，则存在一个纳什均衡（可能是混合策略均衡）。