基于 SOS 的超压缩不等式与 Frankl-Rödl 图

周晟煜

清华大学

2025 年 12 月 30 日

摘要

本文的主要结果是在 Sum-of-Squares (SOS) 证明系统中，给出了**反向超压缩不等式（Reverse Hypercontractive Inequality）**的形式化表述及其证明。

作为该结果的一个推论，我们证明了对于任意常数 $0 < \gamma \leq 1/4$，SOS/Lasserre 半定规划（SDP）层级在度数为 $4\lceil \frac{1}{4\gamma} \rceil$ 时，能够证明如下命题：

$$\text{Frankl-Rödl 图 } FR^n_\gamma \text{ 的最大独立集的相对大小为 } o(1)\text{。}$$

这里 $FR^n_\gamma = (V, E)$ 是一个顶点集为 $V = \{0,1\}^n$ 的图，当且仅当 $\Delta(x,y) = (1-\gamma)n$ 且为偶数时，$(x,y) \in E$。

特别地，我们将展示 4 阶的 SOS 算法能够证明色数下界 $\chi(FR^n_{1/4}) = \omega(1)$。这表明 SOS 层级在处理特定的积分与组合问题时，比标准的 SDP 松弛具有更强的证明能力。

目录

1 引言

超压缩不等式（Hypercontractivity）是布尔函数分析中的核心工具，广泛应用于理论计算机科学、社会选择理论及概率论中。近年来，随着证明复杂性（Proof Complexity）和平方和（Sum-of-Squares, SOS）算法的发展，研究这些分析不等式是否能在受限的证明系统（如 SOS）中被证明变得尤为重要。

1.1 基本定义

首先，我们引入布尔函数分析中的一些基本算子和范数定义。

(噪声算子 T_ρ). 设 $f:\{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$ 为布尔立方体上的实值函数，相关系数 $-1 \le \rho \le 1$。定义噪声算子 T_ρ 为：

$$T_\rho f(x) = \mathbb{E}[f(y) \mid x]$$

其中 y 是 x 的一个 ρ-相关副本。具体来说，对于 y 的每一个分量 y_i，以概率 $\frac{1+\rho}{2}$ 取 $y_i = x_i$，以概率 $\frac{1-\rho}{2}$ 取 $y_i = -x_i$。

等价地，在傅里叶展开下，设 $f(x) = \sum_{S\subseteq[n]} \hat{f}(S)\chi_S(x)$，则：

$$T_\rho f = \sum_{S\subseteq[n]} \rho^{|S|}\hat{f}(S)\chi_S$$

这表明 T_ρ 算子对高频傅里叶系数有指数级的衰减作用。

(p-范数). 对于 $p \in \mathbb{R}$（注意这里 p 不一定大于等于 *1*），定义：

$$||f||_p = \mathbb{E}_{x\sim\{-1,1\}^n}[|f(x)|^p]^{1/p}$$

其中期望是针对均匀分布取的。

1.2 超压缩不等式与反向超压缩不等式

经典的超压缩不等式描述了噪声算子如何将函数的范数“压缩”到更高阶的范数，而反向超压缩不等式则处理 $p < 1$ 的情况，通常涉及非负函数。

(超压缩不等式). 设 $f:\{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$，且 $1 \le p \le q \le \infty$。若 $0 \le \rho \le \sqrt{\frac{p-1}{q-1}}$，那么：

$$||T_\rho f||_q \le ||f||_p$$

(反向超压缩不等式). 设 $f:\{-1,1\}^n \to \mathbb{R}^{\ge 0}$ 为非负函数，且 $-\infty \le q \le p \le 1$。若 $0 \le \rho \le \sqrt{\frac{1-p}{1-q}}$，那么：

$$||T_\rho f||_q \ge ||f||_p$$

在 SOS 系统的背景下，Barak 等人之前的工作已经建立了 (2, 4)-超压缩不等式的 SOS 证明。

定理 1.1. 设 $k \in \mathbb{N}$，令 $\mathcal{P}^{\leq k}$ 为投影算子，将 f 映射到其度数不超过 k 的部分。那么：

$$||\mathcal{P}^{\leq k} f||_4 \leq 3^{k/2}||f||_2$$

Barak 等人证明了，如果将 $f(x)$ 视为形式变量，那么多项式 $9^k||f||_2^4 - ||\mathcal{P}^{\leq k} f||_4^4$ 可以写成多项式的平方和（*SOS*）。

定理 1.2. 对于任意 $q \geq 2$ 和 $f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$，我们有

$$||\mathcal{P}^{\leq k} f||_q \leq (q-1)^{k/2}||f||_2$$

Ryan ODonnell 和 Yuan Zhou 未能通过 SOS 证明实际获得定理 1.2，而是获得了一个较弱的版本。

定理 1.3. 设 $f, g : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}^{\geq 0}$，设 $0 \leq q \leq 1$，且 $0 \leq \rho \leq 1-q$。那么当 (x, y) 是一对 ρ-相关随机字符串时，

$$\mathbb{E}[f(x)g(y)] \geq ||f||_q||g||_q$$

我们在这里将介绍的就是定理 1.3 的 SOS 证明，其中 q 等于偶整数的倒数。作为该结果的一个应用，我们证明了仅仅使用 SOS 层级中的 4 阶算法，就能证明用于 3-染色问题的“Frankl-Rödl”SDP 整数间隙实例具有色数 $\omega(1)$。

定理 1.4. 设 $s \in N^+$ 并记 $q = 2s$。设 $0 \leq \rho \leq \frac{1}{\sqrt{q-1}}$。设 $x = (x_1, ..., x_n)$ 是一系列独立的实随机变量，每个 x_i 满足：

$$\mathbb{E}[x_i^{2j-1}] = 0, \mathbb{E}[x_i^{2j}] \leq (2s-1)^j \frac{\binom{s}{j}}{\binom{2s}{2j}}, 1 \leq j \leq s$$

进一步假设每个 i 都有 $\mathbb{E}[x_i^2] = 1$。那么对于函数 $f_1, ..., f_s : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$，存在如下不等式的 *SOS* 证明：

$$\mathbb{E}[\prod_{i=1}^{s}(T_\rho f_i(x))^2] \leq \prod_{i=1}^{s}\mathbb{E}[f_i(x)^2]$$

然而，对于更一般的 q（定理 1.2），之前的研究未能给出完整的 SOS 证明。本文将重点关注反向超压缩不等式的 SOS 版本（定理 1.3 的变体），特别是当 q 为偶整数的倒数时。

定理 1.5. 设 $k \in N^+$ 且 $0 \leq \rho \leq 1 - \frac{1}{2k}$。对于函数 $f, g : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$，存在如下不等式的 *SOS* 证明：

$$\mathbb{E}_{(x,y)}[f(x)^{2k}g(y)^{2k}] \geq \mathbb{E}[f]^{2k}\mathbb{E}[g]^{2k}$$

注意，这里我们将反向超压缩不等式转化为了关于 $2k$ 次幂的多项式形式，避免了在 *SOS* 系统中处理非整数次幂（如 p-范数当 $p < 1$ 时）的困难。

1.3 应用：Frankl-Rödl 图

我们的主要应用是针对 Frankl-Rödl 图的独立集问题。

定义 1.6. 设 $n \in \mathbb{N}$ 且 $0 \leq \gamma \leq 1$ 使得 $(1-\gamma)n$ 为偶整数。*Frankl-Rödl* 图 FR_γ^n 是 $N = 2^n$ 个顶点 $\{-1,1\}^n$ 上的无向图，边集为

$$\{(x,y) : \Delta(x,y) = (1-\gamma)n\}$$

其中 $\Delta(\cdot,\cdot)$ 表示汉明距离。

定义 1.7 (Frankl-Rödl 图 FR_γ^n)**.** 设 $(1-\gamma)n$ 为偶整数。图 FR_γ^n 的顶点集为 $\{-1,1\}^n$，边集为 $\{(x,y) : \Delta(x,y) = (1-\gamma)n\}$，其中 Δ 为 *Hamming* 距离。

已知该图是 SDP 松弛的经典反例（Integrality Gap）。然而，我们将证明 SOS 层级可以有效地约束其最大独立集的大小。

定理 1.8. 存在常数 K 使得对于所有 $\gamma \leq 1/4$，成立

$$\textit{Max-IS}(FR_\gamma^n) < n(1-\gamma^2/K)^n$$

特别地，当 $\gamma \geq \Omega(\sqrt{\frac{\log n}{n}})$ 且 n 足够大时：

$$\textit{Max-IS}(FR_\gamma^n) \leq o_n(1)$$

$$\chi(FR_\gamma^n) = \omega_n(1)$$

$$\textit{Min-VC}(FR_\gamma^n) \geq 1 - o_n(1)$$

2 预备知识：SOS 证明系统

在深入证明之前，我们需要形式化定义 SOS 证明系统及其相关符号。

定义 2.1 (SOS 证明)**.** 设 $X = (X_1, ..., X_n)$ 为一组不定元。给定多项式集合 $A = \{q_1 \geq 0, ..., q_m \geq 0\} \cup \{r_1 = 0, ..., r_{m'} = 0\}$ 和多项式 p。我们称 A 以度数 k *SOS*-证明 $p \geq 0$，记作 $A \vdash_k p \geq 0$，当且仅当存在多项式 v_j 和 *SOS* 多项式（即多项式的平方和）u_i, u_0 使得：

$$p = u_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i q_i + \sum_{j=1}^{m'} v_j r_j$$

且上述表达式中每一项的度数都不超过 k（即 $\deg(u_0), \deg(u_i q_i), \deg(v_j r_j) \leq k$）。

特别地：

- $A \vdash_k -1 \geq 0$ 称为 k 阶 SOS 反驳（Refutation），意味着集合 A 定义的约束系统无解。

- 若 $A=\emptyset$，记作 $\vdash_k p \geq 0$，意味着 p 本身就是一个度数不超过 k 的平方和多项式。

以下引理和事实在后续证明中将频繁使用：

引理 2.2. 如果 $A \vdash_k p \geq 0$ 且 $A \vdash_{k'} p' \geq 0$，那么 $A \vdash_{\max(k,k')} p + p' \geq 0$。

事实 2.3. 单变量多项式 $p(x)$ 如果是非负的（即 $\forall x \in \mathbb{R}, p(x) \geq 0$），则它一定是 SOS。即 $\vdash_{\deg(p)} p(x) \geq 0$。

事实 2.4. 齐次双变量多项式 $p(x,y)$ 如果是非负的，则它一定是 SOS。这是因为可以通过去齐次化转化为单变量情形。

这两个事实是我们将复杂不等式转化为 SOS 证明的关键工具：只要能将问题规约为单变量或齐次双变量的非负性判断，就自动获得了 SOS 证明。

引理 2.5. 设 $c \geq 0$ 为常数，X 为不定元。那么对于任何 $k \in N^+$，$X \geq c \vdash_k X^k \geq c^k$。

证明. 利用二项式展开：

$$X^k - c^k = (X - c + c)^k - c^k = \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} c^{k-i} (X-c)^i$$

当 i 为偶数时，$(X-c)^i$ 是完全平方（SOS）；当 i 为奇数时，$(X-c)^i = (X-c)(X-c)^{i-1}$，其中 $(X-c)^{i-1}$ 是 SOS，且 $(X-c)$ 是给定的非负约束。因此整体可以写成 SOS 形式。 □

引理 2.6. 对于任何 $k \in N^+$，我们有 $\vdash_{2k} (\frac{X+Y}{2})^{2k} \leq \frac{X^{2k}+Y^{2k}}{2}$。

证明. 多项式 $P(X,Y) = \frac{X^{2k}+Y^{2k}}{2} - (\frac{X+Y}{2})^{2k}$ 是一个齐次双变量多项式。根据凸函数 $x \mapsto x^{2k}$ 的性质，该多项式在实数域上非负。根据事实 2.4，它是 SOS。 □

3 SOS 中的正向超压缩不等式

在处理反向超压缩之前，作为热身，我们先给出针对所有偶整数 q 的 $(2, q)$-超压缩不等式 $||T_\rho f||_q \leq ||f||_2$ 的 SOS 证明。

3.1 放宽的矩条件

我们的证明实际上适用于满足特定矩条件（Moment Conditions）的一类广泛的随机变量，而不仅仅是伯努利分布。设 $s \in \mathbb{N}^+$，我们要求随机变量 x_i 满足：

- $\mathbb{E}[x_i^2] = 1$
- $\mathbb{E}[x_i^{2j-1}] = 0$（奇数阶矩为 0，即分布对称）

- $\mathbb{E}[x_i^{2j}] \leq (2s-1)^j \frac{\binom{s}{j}}{\binom{2s}{2j}}$ 对于 $1 \leq j \leq s$。

注 3.1. 通过转换为阶乘并展开，可以验证：

$$(2s-1)^j \frac{\binom{s}{j}}{\binom{2s}{2j}} = (2j-1)!! \cdot \prod_{i=1}^{j-1} \frac{2s-1}{2s-(2i+1)}$$

由此可见，对于每个固定的 $j \in N^+$，该量作为 s 的函数（对于 $s \geq j$）递减趋向于极限 $(2j-1)!!$，即标准高斯分布的第 $(2j)$ 阶矩。这表明标准高斯分布和均匀随机 ± 1 比特都满足上述所有矩条件。

定理 3.2. 设 $x = (x_1, ..., x_n)$ 是一系列满足 s-矩条件的独立实随机变量。设 $f : \{-1, 1\}^n \to \mathbb{R}$，$s \in \mathbb{N}^+$，且 $0 \leq \rho \leq \sqrt{1/(2s-1)}$。那么

$$||T_\rho f(x)||_{2s} \leq ||f(x)||_2$$

3.2 基础情况：$n = 1$ 的证明

证明. 由于算子 T_ρ 和范数具有张量化性质，只需证明 $n = 1$ 的情况。由齐次性，假设 $\mathbb{E}[f] = 1$。设 $f(x_1) = 1 + \epsilon x_1$，其中 $\epsilon \in \mathbb{R}$。

我们需要比较 $||T_\rho f||_{2s}^{2s}$ 和 $||f||_2^{2s}$。

首先计算左边：

$$T_\rho f(x_1) = 1 + \rho\epsilon x_1$$

利用二项式定理及奇数阶矩为 0 的性质：

$$\begin{aligned}
||T_\rho f||_{2s}^{2s} &= \mathbb{E}[(1 + \rho\epsilon x_1)^{2s}] \\
&= \sum_{k=0}^{2s} \binom{2s}{k} (\rho\epsilon)^k \mathbb{E}[x_1^k] \\
&= \sum_{j=0}^{s} \binom{2s}{2j} \rho^{2j} \epsilon^{2j} \mathbb{E}[x_1^{2j}] \quad \text{(仅保留偶数项)}
\end{aligned}$$

接着计算右边：

$$\begin{aligned}
||f||_2^{2s} &= (\mathbb{E}[(1 + \epsilon x_1)^2])^s = (1 + 2\epsilon\mathbb{E}[x_1] + \epsilon^2\mathbb{E}[x_1^2])^s \\
&= (1 + \epsilon^2)^s \quad (\text{因}\mathbb{E}[x_1] = 0, \mathbb{E}[x_1^2] = 1) \\
&= \sum_{j=0}^{s} \binom{s}{j} \epsilon^{2j}
\end{aligned}$$

现在我们逐项比较 ϵ^{2j} 的系数。我们需要证明对于每个 j：

$$\binom{2s}{2j} \rho^{2j} \mathbb{E}[x_1^{2j}] \leq \binom{s}{j}$$

即：

$$\mathbb{E}[x_1^{2j}] \leq \frac{\binom{s}{j}}{\binom{2s}{2j}}\rho^{-2j}$$

由于 $\rho \leq \frac{1}{\sqrt{2s-1}}$，即 $\rho^{-2} \geq 2s-1$，上述条件等价于：

$$\mathbb{E}[x_1^{2j}] \leq (2s-1)^j \frac{\binom{s}{j}}{\binom{2s}{2j}}$$

这正是我们假设的 s-矩条件。因此不等式成立。 □

3.3 SOS 证明的构造

为了将上述证明转化为 SOS 证明，我们需要处理 $n > 1$ 时的归纳步骤。在标准分析中，这通常依赖于 Minkowski 不等式，但在 SOS 中我们需要一个多项式版本的替代引理。

引理 3.3. 设 v 为偶正整数，G_i, H_i 为不定元。那么：

$$\vdash_{2v} \prod_{i=1}^{v} G_i H_i \leq \frac{1}{\binom{v}{v/2}} \sum_{|T|=v/2} \left(\prod_{i\in T} G_i^2 \prod_{i\in[v]\setminus T} H_i^2 \right)$$

证明. 首先写出恒等式：

$$\prod_{i\in[v]} G_i H_i = \frac{1}{\binom{v}{v/2}} \sum_{|T|=v/2} \underbrace{(\prod_{i\in T} G_i \prod_{i\in[v]\setminus T} H_i)}_{A_T} \underbrace{(\prod_{i\in[v]\setminus T} G_i \prod_{i\in T} H_i)}_{B_T}$$

对于每一项，应用基本的 SOS 不等式 $\vdash_2 XY \leq \frac{1}{2}(X^2+Y^2)$：

$$A_T B_T \leq \frac{1}{2}A_T^2 + \frac{1}{2}B_T^2$$

注意到 A_T^2 和 B_T^2 对应的正是引理右边的项（只是集合 T 和 $[v]\setminus T$ 互换）。由于求和是对所有大小为 $v/2$ 的子集 T 进行的，这种互换是对称的。将所有项加起来即可得证。 □

定理 3.4. 在满足 s-矩条件的前提下，对于 n 变量函数 $f_i(x)$：

$$\vdash_{2s} \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{s} (T_\rho f_i(x))^2\right] \leq \prod_{i=1}^{s} \mathbb{E}[f_i(x)^2]$$

这里 $q = 2s$，且 $0 \leq \rho \leq \sqrt{1/(2s-1)}$。对每个 $x = (x_1, \ldots, x_n)$，我们记

$$f_i(x) = \sum_{S\subseteq[n]} \hat{f}_i(S) \prod_{j\in S} x_j, T_\rho f_i(x) = \sum_{S\subseteq[n]} \rho^{|S|} \hat{f}_i(S) \prod_{j\in S} x_j$$

证明思路. 对变量数 n 进行归纳。

对于 $n \geq 1$，将函数分解为 $f_i(x) = x_n g_i(x') + h_i(x')$，其中 $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$。于是 $T_\rho f_i(x) = \rho x_n T_\rho g_i + T_\rho h_i$。

展开左边的期望 $\mathbb{E}[\prod(\rho x_n \tilde{G}_i + \tilde{H}_i)^2]$（其中 $\tilde{G} = T_\rho g$）。利用 x_n 的独立性和矩条件，将 x_n 的高阶矩替换为常数界。

这会产生混合项 $\tilde{G}$ 和 $\tilde{H}$ 的乘积。利用引理 3.3 将这些混合项解耦为 $\tilde{G}^2$ 和 $\tilde{H}^2$ 的形式。

最后，利用归纳假设处理 $n-1$ 变量的期望。整个证明的关键在于系数的匹配，这可以通过组合恒等式来保证最终系数恰好为 1，从而使得右边整理为 $\prod(\mathbb{E}[g_i^2] + \mathbb{E}[h_i^2]) = \prod \mathbb{E}[f_i^2]$。 $\square$

4 SOS 中的反向超压缩不等式

本节我们将攻克本文最核心的技术难点：在 SOS 系统中证明反向超压缩不等式。这是解决 Frankl-Rödl 图问题的关键工具。

4.1 主要定理与归纳框架

我们的目标是证明以下关于 $2k$ 次多项式的反向不等式。

定理 4.1. 设 $k, n \in \mathbb{N}^+$，设 $0 \leq \rho \leq 1 - \frac{1}{2k}$。对于 $\{-1,1\}^n$ 上的不定元函数 $f(x), g(x)$：

$$\vdash_{4k} \mathbb{E}_{(x,y)\sim\rho\text{-}corr}[f(x)^{2k} g(y)^{2k}] \geq \mathbb{E}[f]^{2k}\mathbb{E}[g]^{2k}$$

对于固定的 k，我们对维数 n 进行归纳。

1. **归纳步骤** ($n > 1$)：利用期望的线性性质，将 n 维期望拆解为 $n-1$ 维期望的组合：

$$\mathbb{E}[f(x)^{2k} g(y)^{2k}] = \sum_{x_n, y_n \in \{-1,1\}} Pr(x_n, y_n) \mathbb{E}_{x',y'}[f_{x_n}(x')^{2k} g_{y_n}(y')^{2k}]$$

   其中 f_{x_n} 是固定第 n 个比特后的限制函数。利用归纳假设，每一项 $\mathbb{E}_{x',y'}[\ldots]$ 都可以被下界 $\mathbb{E}[f_{x_n}]^{2k}\mathbb{E}[g_{y_n}]^{2k}$ 控制。

2. **基础情况** ($n = 1$)：此时问题转化为证明一个关于 4 个实变量的代数不等式。这是证明中最困难的部分。

定理 4.2. 设 $k \in \mathbb{N}^+$ 且 $0 \leq \rho \leq 1 - \frac{1}{2k}$。设 F_0, F_1, G_0, G_1 为实不定元。那么：

$$\begin{aligned} \vdash_{4k} &(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\rho)(F_0^{2k}G_0^{2k} + F_1^{2k}G_1^{2k}) \\ &+(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\rho)(F_0^{2k}G_1^{2k} + F_1^{2k}G_0^{2k}) \end{aligned} \geq (\frac{F_0+F_1}{2})^{2k}(\frac{G_0+G_1}{2})^{2k}$$

目标不等式关于 ρ 是线性的。因此，只需证明端点情况 $\rho=0$ 和 $\rho^*=1-\frac{1}{2k}$ 成立即可。$\rho=0$ 的情况是平凡的。因此我们只需关注 $\rho=\rho^*$。通过代换 $\mu=(F_0+F_1)/2, \alpha=(F_0-F_1)/2$ ，$\nu=(G_0+G_1)/2, \beta=(G_0-G_1)/2$，我们将定理 4.2 转化为证明以下多项式非负性：

$$\vdash_{4k} \begin{matrix} (\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\rho^*)((\mu+\alpha)^{2k}(\nu+\beta)^{2k}+(\mu-\alpha)^{2k}(\nu-\beta)^{2k}) \\ +(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\rho^*)((\mu+\alpha)^{2k}(\nu-\beta)^{2k}+(\mu-\alpha)^{2k}(\nu+\beta)^{2k}) \end{matrix} \geq \mu^{2k}\nu^{2k}$$

再通过齐次性，我们可以令 $\mu=\nu=1$。我们只需要证明以下“两点不等式”在 SOS 系统中成立：

(两点不等式 $P_k(a,b)$). 设 $\rho^*=1-\frac{1}{2k}$，那么：

$$\begin{aligned}\vdash_{4k} P_k(a,b) := &\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\rho^*\right)\left[(1+a)^{2k}(1+b)^{2k}+(1-a)^{2k}(1-b)^{2k}\right] \\ &+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\rho^*\right)\left[(1+a)^{2k}(1-b)^{2k}+(1-a)^{2k}(1+b)^{2k}\right]-1\geq 0\end{aligned}$$

4.2 关键技术：计算机代数辅助证明

如何证明 $P_k(a,b)$ 是 SOS？直接构造平方和极其困难。我们采用了一种基于变量代换和计算机代数的策略。令：

$$r=a-b, \quad s=a+b, \quad t=ab$$

利用恒等式 $\frac{1}{2}((c+d)^{2k}+(c-d)^{2k})=\sum\binom{2k}{2i}c^{2k-2i}d^{2i}$，并将 r^2 替换为 s^2-4t，我们可以将 $P_k(a,b)$ 重写为关于 s^2 的多项式：

$$P_k(a,b)=-1+\sum_{i=0}^{k}\left(\begin{matrix}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\rho^*)\binom{2k}{2i}(1+t)^{2k-2i}+ \\ (\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\rho^*)\sum_{j=i}^{k}\binom{2k}{2j}(1-t)^{2k-2j}\binom{j}{i}(-4t)^{j-i}\end{matrix}\right)s^{2i}$$

$$=Q_{k,0}(t)+Q_{k,1}(t)s^2+Q_{k,2}(t)s^4+\cdots+Q_{k,k}(t)s^{2k}$$

其中 $Q_{k,i}(t)$ 是仅依赖于 t 的单变量多项式。

如果我们能证明对于所有的 i，系数多项式 $Q_{k,i}(t)$ 在实数域上非负，那么根据事实 2.4，每个 $Q_{k,i}(t)$ 都是 SOS。由于 s^{2i} 显然也是 SOS，那么 $P_k(a,b)$ 作为 SOS 的线性组合，必然也是 SOS。

命题 4.3. 对于每个 $k\in\mathbb{N}^+$（且 $\rho^*=1-\frac{1}{2k}$），多项式 $Q_{k,0}(t)$ 是非负的。

这是最复杂的一项。我们利用 **Zeilberger 算法**来寻找 $Q_{k,0}(t)$ 的结构。重写 $Q_{k,0}(t)$ 得到：

$$Q_{k,0}(t) = -1 + (1+t)^{2k}\left(1 - \frac{1}{4k} + \frac{1}{4k}\sum_{j=0}^{k}\binom{2k}{2j}\frac{(1-t)^{2k-2j}}{(1+t)^{2k}}(-4t)^j\right)$$

我们将括号中的求和部分记为 $S_k(t)$，计算机算法发现 $Q_{k,0}(t)$ 包含的部分和满足一个二阶线性递推关系：

$$(t+1)^2 S_{k+2}(t) - 2(t^2-6t+1)S_{k+1}(t) + (t+1)^2 S_k(t) = 0$$

解该递推关系得到闭式解：

$$Q_{k,0}(t) = -1 + (1+t)^{2k}\left(1 - \frac{1}{4k} + \frac{1}{4k}\cos\left(4k\arctan(\sqrt{t})\right)\right)$$

利用 $(1+t)^{2k} \geq 1 + 2kt$，我们只需证明：

$$-1 + (1+2kt)\left(1 - \frac{1}{4k} + \frac{1}{4k}\cos(4k\arctan(\sqrt{t}))\right) \geq 0$$

我们分情况讨论：

- $t \geq \frac{1}{2k(2k-1)}$：利用 $\cos(\cdot) \geq -1$ 即可证明。
- $t < \frac{1}{2k(2k-1)}$：我们使用 Taylor 展开估计余弦函数：

  $$\cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}$$

  将 $x = 4k\sqrt{t} \in \left(4k\arctan(\sqrt{t}), \pi\right)$ 代入并展开，我们得到一个关于 t 的二次多项式 $q(t)$。通过验证该二次多项式的判别式及端点值，我们严格证明了在该微小区间内 $Q_{k,0}(t) \geq 0$。

命题 4.4. *对于所有 $1 \leq i \leq k \in \mathbb{N}^+$，多项式 $Q_{k,i}(t)$ 是非负的（其中 $\rho^* = 1 - \frac{1}{2k}$）。*

证明. 事实上，我们将证明一个更强的结论：即使当 ρ^* 设为 0 时，每个 $Q_{k,i}(t)$ 也是非负的。即，我们将证明：

$$\tilde{Q}_{k,i}(t) := \frac{1}{2}\binom{2k}{2i}(1+t)^{2k-2i} + \frac{1}{2}\sum_{j=i}^{k}\binom{2k}{2j}(1-t)^{2k-2j}\binom{j}{i}(-4t)^{j-i}$$

是非负的。之所以说这是更强的结论，是因为 $Q_{k,i}(t)$ 和 $\tilde{Q}_{k,i}(t)$ 是相同两个主要量的凸组合，但 $\tilde{Q}_{k,i}(t)$ 在显然非负的第一项 $\binom{2k}{2i}(1+t)^{2k-2i}$ 上的“权重”更小（系数为 1/2，而 $Q_{k,i}(t)$ 中该项系数为 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\rho^* > 1/2$）。

手工证明这一点并不容易，但利用计算机辅助可以得到一个紧凑的证明。可以验证以下递推关系对所有整数 $0 \leq i \leq k$ 成立：

$$(1+i)(1+k)\tilde{Q}_{k+2,i+1}(t) = (1+i)(2+k)(1+t)^2\tilde{Q}_{k+1,i+1}(t) + (2+k)(2+2k-i)\tilde{Q}_{k+1,i}(t)$$

这是通过猜测多项式递推的形式并通过计算机求解得到的。鉴于此，我们只需证明 $k=i$ 和 $i=0$ 两种情况下的 $\tilde{Q}_{k,i}(t)\geq 0$；一般 k 和 i 的非负性则由归纳法得出。

对于 $k=i$，我们有 $\tilde{Q}_{k,k}(t)=1\geq 0$。

对于 $i=0$，非负性的证明与命题 4.3 类似，但更简单。

对于 $t<0$，由定义显然可知 $\tilde{Q}_{k,0}(t)$ 是非负的（因为各项均为正或平方项）。

对于 $t\geq 0$，命题 4.3 的证明过程给出了：

$$\tilde{Q}_{k,0}(t)=\frac{1}{2}(1+t)^{2k}\left(1+\cos(4k\arctan(\sqrt{t}))\right)\geq 0$$

上式显然成立。 □

5 SOS 中的 Frankl-Rödl 定理

本节展示我们工作在 3-染色和顶点覆盖问题上的应用。具体而言，我们给出了 Frankl-Rödl 定理的一个低阶 SOS 证明，即证明 $Max-IS(FR^n_\gamma)<o(1)$。

5.1 Frankl-Rödl 定理

我们首先陈述关于 Frankl-Rödl 图独立集大小的主要 SOS 结论。

定理 5.1. 设 $n\in\mathbb{N}^+$ 且 $\frac{1}{\log n}\leq\gamma\leq\frac{1}{4}$，使得 $(1-\gamma)n$ 为偶整数。给定 *Frankl-Rödl* 图 $FR^n_\gamma=(V,E)$，对于每个 $x\in V=\{-1,1\}^n$，设 $f(x)$ 为一个不定元。那么，存在一个度数为 $4\lceil\frac{1}{4\gamma}\rceil$ 的 *SOS* 反驳，针对表达“$Max-IS(G)\geq O(n^{-\gamma/10})$”的系统；即系统：

$$\left\{\begin{array}{l} f(x)^2=f(x)\quad\forall x\in V,\\ f(x)f(y)=0\quad\forall(x,y)\in E,\\ \dfrac{1}{|V|}\displaystyle\sum_{x\in V}f(x)\geq Cn^{-\gamma/10}\end{array}\right\}\vdash_{4\lceil\frac{1}{4\gamma}\rceil}-1\geq 0$$

其中 C 是常数。

该定理表明，$N^{O(1/\gamma)}$ 时间复杂度的 SOS/Lasserre 层级算法能够证明 $Max-IS(FR^n_\gamma)\leq O(n^{-\gamma/10})$。特别地，对于 $\gamma=1/4$，4 阶 SOS 算法即可证明 $\chi(FR^n_{1/4})=\omega(1)$。这比 Charikar 之前针对 SDP 的结果要强。

定理 5.2. 固定 $0<\gamma<1/2$ 和 $0<\alpha\leq 1$。在图 FR^n_γ 中，如果 $S\subseteq V$ 满足 $|S|/2^n\geq\alpha$，那么：

$$Pr_{(x,y)\sim E}[x\in S,y\in S]\geq 2(\alpha/2)^{1/\gamma}-o_n(1)$$

这表明任何大小为 $\alpha 2^n$ 的顶点集 S 都包含至少 $2(\alpha/2)^{1/\gamma}-o_n(1)$ 的边比例。因此，独立集的大小至多为 $O(n^{-\gamma/10})$。

5.2 定义

为了将图的组合性质转化为分析性质，我们需要引入平滑算子。

定义 5.3. 对于整数 $0 \le d \le n$，算子 S_d 作用于函数 $f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$ 上，定义为 $S_d f(x) = \mathbb{E}_y[f(y)]$，其中 y 是在满足 $\Delta(x,y) = d$ 的条件下均匀随机选取的。

直观上，S_d 算子应该表现得像噪声算子 T_ρ（其中 $\rho = 1 - 2d/n$）。然而，这里存在一个“奇偶性”问题：如果 d 是奇数，则 S_d 映射到的 y 与 x 奇偶性相反；如果 d 是偶数，则相同。而噪声算子 T_ρ 是混合的，不区分奇偶。为了解决这个问题，我们需要定义一个混合算子：

定义 5.4. 对于整数 $0 \le d < n$，定义算子 $S'_d = \frac{1}{2}S_d + \frac{1}{2}S_{d+1}$。

下面的定理展示了 S'_d 与 T_ρ 的近似关系，这是连接图论属性与超压缩不等式的桥梁：

定理 5.5. 设 $f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$。设 $d = n - c$ 对于某个整数 $c^2\sqrt{n} \le c \le n/2$。令 $\rho = 1 - 2d/n$。那么：

$$\langle f, S'_d f\rangle - \langle f, T_\rho f\rangle = \sum_{U \subseteq [n]} \hat{f}(U)^2 \cdot \delta(U)$$

其中误差项 $\delta(U)$ 满足 $\|\delta(U)\|_\infty \le O(\max\{n^{-1/5}, \frac{n}{c^2}\log^2(\frac{c^2}{n})\})$。

5.3 定理 5.1 的证明

证明. 记 $d = (1-\gamma)n$，并记 $\rho' = 1 - 2d/n = -(1-2\gamma)$。我们将函数 f 根据汉明权重的奇偶性分解为 f_0 和 f_1：

$$f_i(x) = \begin{cases} f(x) & \text{若}x\text{ 的汉明权重模 2 等于}i \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

由于我们假设 $d = (1-\gamma)n$ 为偶数，如果 x 和 y 的汉明权重奇偶性相同，则它们的距离只能是 d（偶数）而不能是 $d+1$（奇数）。

由图的独立集约束 $\{f(x)f(y) = 0, \forall \Delta(x,y) = d\}$，我们有：

$$\vdash_2 \langle f_0, S'_d f_0\rangle + \langle f_1, S'_d f_1\rangle = 0$$

这是因为 S'_d 包含 S_d 和 S_{d+1} 两部分。对于 $\langle f_i, S_d f_i\rangle$，由于 $f(x)f(y) = 0$ (当距离为 d)，该项为 0。对于 $\langle f_i, S_{d+1} f_i\rangle$，由于 S_{d+1} 连接不同奇偶性的点，而 f_i 仅在特定奇偶性上非零，该内积本身恒为 0。

接下来利用定理 5.5，我们可以将 S'_d 替换为噪声算子 $T_{\rho'}$：

$$\vdash_2 \langle f_0, T_{\rho'} f_0\rangle + \langle f_1, T_{\rho'} f_1\rangle \le \delta \sum_U \hat{f}_0(U)^2 + \delta \sum_U \hat{f}_1(U)^2 = \delta\mathbb{E}[f^2]$$

其中误差项 δ 是 n 的负次幂，趋近于 0。

为了使用反向超压缩不等式，我们需要正相关的噪声算子。定义 $g_i(x) = f_i(-x)$，并令 $\rho = -\rho' = 1 - 2\gamma$。此时有 $\langle f_i, T_{\rho'} f_i \rangle = \langle f_i, T_\rho g_i \rangle = \mathbb{E}_{(x,y)\sim\rho\text{-corr}}[f_i(x) g_i(y)]$。于是我们得到：

$$\mathbb{E}[f_0(x)g_0(y)] + \mathbb{E}[f_1(x)g_1(y)] \le \delta\mathbb{E}[f^2]$$

现在我们将度数提升到 $2k$，其中 $k = \lceil \frac{1}{4\gamma} \rceil \ge 1$。利用布尔约束 $f(x)^2 = f(x)$，我们有 $\vdash_{2k} f(x)^{2k} = f(x)$。因此上述不等式可以写为：

$$\mathbb{E}[f_0(x)^{2k} g_0(y)^{2k}] + \mathbb{E}[f_1(x)^{2k} g_1(y)^{2k}] \le \delta\mathbb{E}[f]$$

注意到 $\rho = 1 - 2\gamma \le 1 - \frac{1}{2k}$，这满足了反向超压缩定理 4.1 的条件。应用定理 4.1，我们得到：

$$\mathbb{E}[f_0]^{2k}\mathbb{E}[g_0]^{2k} + \mathbb{E}[f_1]^{2k}\mathbb{E}[g_1]^{2k} \le \mathbb{E}[f_0(x)^{2k} g_0(y)^{2k}] + \mathbb{E}[f_1(x)^{2k} g_1(y)^{2k}] \le \delta\mathbb{E}[f]$$

对于 $i = 0, 1$，形式上有 $\mathbb{E}[f_i] = \mathbb{E}[g_i]$。利用引理 2.6 的凸性：

$$\mathbb{E}[f_0]^{4k} + \mathbb{E}[f_1]^{4k} \ge 2\left(\frac{\mathbb{E}[f_0] + \mathbb{E}[f_1]}{2}\right)^{4k} = 2(\mathbb{E}[f]/2)^{4k}$$

因此推导出：

$$2^{4k-1}\delta \ge \mathbb{E}[f]^{4k}$$

最后，结合假设 $\frac{1}{|V|}\sum f(x) \ge Cn^{-\gamma/10}$。利用引理 2.5：

$$\mathbb{E}[f] \ge Cn^{-\gamma/10} \vdash_{4k} \mathbb{E}[f]^{4k} \ge C^{4k} n^{-4k\gamma/10} \ge C^{4k} n^{-1/5}$$

只要常数 C 足够大，使得 $C^{4k} n^{-1/5} > 2^{4k-1}\delta$，我们就得到了矛盾。 □

6 结论

- 关于反向超压缩性：我们可能还没有给出 SOS 两点不等式的 Book proof。是否有一种计算机代数技术，能够符号化地、自动地证明所有 k 的 SOS 性质。
- 关于 Frankl-Rödl 定理：Benabbas-Hatami-Magen 的证明是否可以改进以适用于更小的 γ，例如 $\sqrt{\frac{\log n}{n}}$？
- 一个有趣的问题：超立方体的顶点等周不等式意味着：如果 $A, B \subseteq \{-1, 1\}^n$ 且 $dist(A, B) \ge \sqrt{n \log n}$，那么 $|A||B|/4^n$ 必须非常小。这个事实是否有 $O(1)$ 度数的 SOS 证明？