

Probability and Statistics

PhD Qualification Exam

Mock Examination No. 4 – Solutions

Problem 1

10 points

对任意 $x, z \in \mathbb{F}_3$, 事件 $\{X = x, Z = z\}$ 等价于 $\{A = x, B = z - x\}$, 故

$$\mathbb{P}(X = x, Z = z) = \frac{1}{9} = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Z = z).$$

同理 (Y, Z) 独立, 而 (X, Y) 由假设独立。因此三对均独立。

但是 $Z = X + Y \pmod{3}$ a.s., 所以例如

$$\mathbb{P}(X = 0, Y = 0, Z = 0) = \frac{1}{9} \neq \frac{1}{27}.$$

故三者不 mutually independent。

把取值视作实数时, pairwise independence 立即给出

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(X, Z) = \text{Cov}(Y, Z) = 0.$$

协方差只描述二阶成对关系; 即使所有 pairwise covariances 都为零, 也不能推出 mutual independence, 本例即为反例。

Scoring guide (10 points). (X, Z) 的联合计算 2 分、其余两对与结论 3 分; 确定性关系 1 分、联合概率反证 2 分; 协方差与解释 2 分。

Problem 2

15 points

先证明 X 可积。由 uniform integrability, $\sup_n \mathbb{E}|X_n| < \infty$ 。又由 convergence in probability 可抽出子列 $X_{n_k} \rightarrow X$ a.s., 故 Fatou lemma 给出

$$\mathbb{E}|X| \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}|X_{n_k}| < \infty.$$

此外, 对任意 $K > 0$, 连续函数 $q_K(x) = (|x| - K)_+$ 与 Fatou lemma 给出

$$\mathbb{E}q_K(X) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}q_K(X_{n_k}) \leq \sup_n \mathbb{E}(|X_n|; |X_n| > K).$$

右端由 uniform integrability 在 $K \rightarrow \infty$ 时趋于零。因为 $|X|\mathbf{1}_{\{|X|>2K\}} \leq 2q_K(X)$, 所以 X 的尾部也一致趋于零。

现在对固定 K 定义截断 $h_K(x) = (-K) \vee (x \wedge K)$ 。它有界连续, 故 $h_K(X_n) \xrightarrow{p} h_K(X)$, 且有界性给出

$$\mathbb{E}|h_K(X_n) - h_K(X)| \rightarrow 0.$$

再写

$$\mathbb{E}|X_n - X| \leq \mathbb{E}|h_K(X_n) - h_K(X)| + \mathbb{E}(|X_n|; |X_n| > K) + \mathbb{E}(|X|; |X| > K).$$

先令 $n \rightarrow \infty$, 再令 $K \rightarrow \infty$ 。后两项分别由原序列的 uniform integrability 和上面证明的极限尾部控制趋于零, 所以 $X_n \rightarrow X$ in L^1 。

对反例, 若 $U(\omega) > 0$, 则最终 $1/n < U(\omega)$, 所以 $X_n(\omega) = 0$, 从而 $X_n \rightarrow 0$ a.s.。但

$$\mathbb{E}|X_n| = n\mathbb{P}(U \leq 1/n) = 1,$$

故不在 L^1 中收敛。并且对任意 K , 取 $n > K$ 有

$$\mathbb{E}(|X_n|; |X_n| > K) = 1,$$

所以 uniform-integrability tail criterion 失败。

Scoring guide (15 points). 抽取 a.s. 子列与极限可积性 3 分; 截断 2 分、分解不等式 2 分、UI 控尾并完成 L^1 结论 3 分; 反例 a.s. 收敛 2 分、非 L^1 1 分、直接验证非 UI 2 分。

Problem 3

10 points

$M_n = S_n^2 - n$ 是 martingale。对有界停时 $\tau \wedge N$ 使用 optional stopping:

$$\mathbb{E}S_{\tau \wedge N}^2 = \mathbb{E}(\tau \wedge N).$$

停止前 $|S_{\tau \wedge N}| \leq a$, 故右侧不超过 a^2 。Monotone convergence 给出 $\mathbb{E}\tau \leq a^2 < \infty$, 特别地 $\tau < \infty$ a.s.。再令 $N \rightarrow \infty$; 左侧由 bounded convergence 趋于 $\mathbb{E}S_\tau^2 = a^2$, 右侧由 monotone convergence 趋于 $\mathbb{E}\tau$ 。所以

$$\mathbb{E}\tau = a^2.$$

同样对 martingale S_n 停在 $\tau \wedge N$, 停止变量由 a 控制, 故 $0 = \mathbb{E}S_\tau$ 。若 $q = \mathbb{P}(S_\tau = a)$, 则 $0 = aq - a(1 - q)$, 所以 $q = 1/2$ 。

Scoring guide (10 points). 二次 martingale 1 分、先停在有界时间及等式 2 分、控制和 MCT 得退出有限 2 分、再取极限得均值 2 分; 线性 martingale 停止 2 分、退出概率 1 分。

Problem 4

15 points

因

$$P(i, j) \geq \alpha \nu_j > 0,$$

任意状态一步可达任意状态, 故不可约; 且 $P(i, i) > 0$, 故非周期。

级数中的权重和为一, 所以 π 是概率分布。并且

$$\begin{aligned} \pi P &= (1 - \alpha)\pi Q + \alpha \nu \\ &= \alpha \sum_{k=1}^{\infty} (1 - \alpha)^k \nu Q^k + \alpha \nu = \pi. \end{aligned}$$

对任意两个概率分布 μ, η , restart 部分抵消:

$$\mu P - \eta P = (1 - \alpha)(\mu Q - \eta Q).$$

Markov kernel 在 total variation norm 下为 contraction, 故

$$\|\mu P - \eta P\|_{\text{TV}} \leq (1 - \alpha)\|\mu - \eta\|_{\text{TV}}.$$

若 π' 也是 stationary, 取 $\mu = \pi', \eta = \pi$ 得 $\|\pi' - \pi\|_{\text{TV}} \leq (1 - \alpha)\|\pi' - \pi\|_{\text{TV}}$, 故唯一。迭代同一不等式并取 $\eta = \pi$ 即得题设几何收敛界。

Scoring guide (15 points). 不可约 2 分、非周期 1 分; 级数是概率 1 分、平稳计算 4 分; TV contraction 3 分、唯一性 2 分、迭代界 2 分。

Problem 5

15 points

当 $\theta \neq 0$ 时,

$$Z(\theta) = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{\theta} = \frac{2 \sinh \theta}{\theta},$$

连续延拓给出 $Z(0) = 2$ 。样本 likelihood 为

$$L(\theta; x) = Z(\theta)^{-n} e^{\theta T} \prod_i \mathbf{1}_{[-1,1]}(x_i).$$

对 $\theta_2 > \theta_1$, likelihood ratio 与 $e^{(\theta_2 - \theta_1)T}$ 成比例, 故在 T 中严格递增, 即具有 MLR。

令 c_α 满足

$$\mathbb{P}_{\theta=0}(T > c_\alpha) = \alpha.$$

T 有连续分布, 故无需随机化。拒绝域 $T > c_\alpha$ 。由 MLR 和 Karlin–Rubin theorem, 该检验对 $\theta > 0$ UMP; 同时 T 关于 θ stochastic increasing, 所以复合零假设内拒绝概率在边界 $\theta = 0$ 最大, size 恰为 α 。

对任意固定 $\theta_1 > 0$, Neyman–Pearson lemma 表明检验 0 对 θ_1 的唯一 most powerful size- α 拒绝域是 $T > c_\alpha$ (零概率边界除外)。对任意 $\theta_2 < 0$, 唯一 NP 区域则是 $T < d_\alpha$, 其中 $\mathbb{P}_0(T < d_\alpha) = \alpha$ 。当 $\alpha < 1/2$ 时两区域不可能 a.s. 相同, 因此不存在同时对两侧所有备择最强的 size- α test。

Scoring guide (15 points). Z 及连续值 2 分、likelihood ratio/MLR 2 分; 临界值与规则 2 分、复合 size 2 分、Karlin–Rubin 2 分; 两个简单备择的 NP 唯一区域 3 分、矛盾结论 2 分。

Problem 6

10 points

M/θ 的 CDF 为 u^n , $0 < u < 1$ 。因此

$$\mathbb{E}M = \frac{n}{n+1}\theta, \quad \mathbb{E}M^2 = \frac{n}{n+2}\theta^2.$$

故 $\delta = (n+1)M/n$ 无偏, 且

$$\text{Var}(\delta) = \frac{\theta^2}{n(n+2)}.$$

若错误地忽略 indicator $\mathbf{1}_{\{0 < x_i < \theta\}}$ 的参数依赖, 形式 score 为 $-n/\theta$, 其期望并不为零:

$$\mathbb{E}_\theta\{\partial_\theta \log L(\theta; X)\} = -\frac{n}{\theta} \neq 0.$$

根本原因是 support 随 θ 改变, 不能把参数微分移入积分: $\partial_\theta \int f_\theta(x) dx$ 含有移动边界项。于是用于 Cramér–Rao inequality 的 regularity identity 失败。确实, $\theta^2/[n(n+2)] < \theta^2/n$, 这不是矛盾, 而是该下界不适用。

Scoring guide (10 points). 最大值分布 2 分、两个矩 1 分、无偏和方差 2 分; 形式 score 及非零均值 2 分、移动 support/微分失败 2 分、解释表面矛盾 1 分。

Problem 7

15 points

因 $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}_1$, $P_1 - P_0$ 与 $I - P_1$ 是互相正交的 idempotent matrices, 秩分别为 $r_1 - r_0$ 和 $n - r_1$ 。在 H_0 下,

$$(P_1 - P_0)\mu = 0, \quad (I - P_1)\mu = 0.$$

Cochran theorem 给出

$$\frac{\text{RSS}_0 - \text{RSS}_1}{\sigma^2} = \frac{Y^\top (P_1 - P_0) Y}{\sigma^2} \sim \chi_{r_1 - r_0}^2,$$

$$\frac{\text{RSS}_1}{\sigma^2} \sim \chi_{n - r_1}^2,$$

且二者独立。

因此

$$F = \frac{(\text{RSS}_0 - \text{RSS}_1)/(r_1 - r_0)}{\text{RSS}_1/(n - r_1)} \sim F_{r_1 - r_0, n - r_1}$$

under H_0 。当 $F > F_{r_1 - r_0, n - r_1; 1 - \alpha}$ 时拒绝, 即为 exact level- α test。

对一般 $\mu \in \mathcal{M}_1$, 分子除以 σ^2 为 noncentral chi-square, 非中心参数

$$\Delta = \frac{\|(P_1 - P_0)\mu\|^2}{\sigma^2}.$$

分母仍是独立的 central chi-square, 因此 F 服从 noncentral $F_{r_1 - r_0, n - r_1}(\Delta)$, power 是其超过上述临界值的概率。

Scoring guide (15 points). 两个投影的秩与正交性 2 分、两个卡方分布 3 分、独立性 1 分; F statistic 2 分、临界区与 exact level 2 分; 非中心参数 3 分、noncentral F 与 power 2 分。

Problem 8

10 points

Uniform prior 即 $\text{Beta}(1, 1)$, 故

$$p \mid X = x \sim \text{Beta}(x + 1, n - x + 1).$$

对 absolute-error loss, posterior risk 的极小点是 posterior median; 由于 posterior density 连续且在 $(0, 1)$ 内为正, median 唯一, 可由

$$\mathbb{P}(p \leq d \mid x) = \frac{1}{2}$$

刻画。

若 $x = n$, posterior 为 $\text{Beta}(n+1, 1)$, CDF 为 d^{n+1} , 所以

$$d_{\text{Bayes}} = 2^{-1/(n+1)}.$$

相应 posterior mean 为 $(n+1)/(n+2)$, 一般与上述 median 不同。Mean 最小化 squared-error posterior risk, 而 median 最小化 absolute-error posterior risk; 损失不同导致动作不同。

Scoring guide (10 points). posterior 3 分、绝对损失下 median 及刻画 2 分; 特殊 posterior/CDF 1 分、显式 median 2 分; posterior mean 与损失解释 2 分。