

Probability and Statistics

PhD Qualification Exam

Mock Examination No. 1 – Solutions

Problem 1

10 points

令 $I = 1$ 表示 X 先发生。对 $t > 0$,

$$\mathbb{P}(T \in dt, I = 1) = \lambda e^{-(\lambda+\mu)t} dt, \quad \mathbb{P}(T \in dt, I = 0) = \mu e^{-(\lambda+\mu)t} dt.$$

因此 $T \sim \text{Exp}(\lambda + \mu)$, 且

$$\mathbb{P}(I = 1) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}, \quad \mathbb{P}(I = 0) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}.$$

联合律恰好分解为边缘律之积, 故 $T \perp\!\!\!\perp I$ 。

在 $I = 1$ 时, $R = Y - X$ 。给定 $X = t < Y$ 后, 由 exponential distribution 的 memoryless property, $Y - t \sim \text{Exp}(\mu)$, 且该条件律与 t 无关。所以

$$R \mid (I = 1) \sim \text{Exp}(\mu), \quad R \mid (I = 0) \sim \text{Exp}(\lambda).$$

全期望公式给出

$$\mathbb{E}R = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \frac{1}{\mu} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{1}{\lambda}.$$

Scoring guide (10 points). (T, I) 联合律及边缘律 3 分; 独立性 1 分; 两个条件分布各 2 分; 全期望计算 2 分。

Problem 2

15 points

记 $m_2 = \mathbb{E}X_1^2 = \sigma^2 + \mu^2$ 。由全期望与全方差公式,

$$\mathbb{E}S_n = \mathbb{E}(N_n \mu) = n\mu,$$

$$\text{Var}(S_n) = \mathbb{E}(N_n \sigma^2) + \text{Var}(N_n \mu) = n\sigma^2 + n\mu^2 = nm_2.$$

设 $\phi(u) = \mathbb{E}e^{iuX_1}$ 。有限二阶矩保证

$$\phi(u) = 1 + i\mu u - \frac{m_2 u^2}{2} + o(u^2), \quad u \rightarrow 0.$$

Poisson random sum 的特征函数为 $\mathbb{E}e^{iuS_n} = \exp\{n(\phi(u) - 1)\}$ 。于是标准化变量的特征函数等于

$$\exp\left\{n\left(\phi\left(\frac{t}{\sqrt{nm_2}}\right) - 1\right) - \frac{itn\mu}{\sqrt{nm_2}}\right\} \rightarrow e^{-t^2/2}.$$

极限特征函数在零点连续, 故由 Lévy continuity theorem 得到所需的标准正态极限。

若 $\mu = 0$, 则 $N_n/n \xrightarrow{p} 1$, 特别地 $N_n \xrightarrow{p} \infty$ 。对任意确定的 $k \rightarrow \infty$, 普通 i.i.d. CLT 给出 $\sum_{j=1}^k X_j/(\sigma\sqrt{k}) \xrightarrow{d} N(0, 1)$ 。由于 N_n 与样本独立, 将分布函数按 N_n 条件化可得同一结论在随机指标 N_n 下仍成立; $\mathbb{P}(N_n = 0) = e^{-n} \rightarrow 0$, 所给约定不影响极限。因此

$$\frac{S_n}{\sigma\sqrt{N_n}} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

Scoring guide (15 points). 均值 1 分、方差 2 分; 特征函数展开 3 分、Poisson 复合公式 2 分、极限计算 2 分、Lévy 定理条件 1 分; 随机指标论证 3 分、零事件处理 1 分。

Problem 3

10 points

令 $\mathcal{F}_n$ 为前 n 次抽取生成的过滤。给定 $\mathcal{F}_n$, 下一次抽到红球的概率为 Z_n , 所以

$$\mathbb{E}(Z_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \frac{R_n + Z_n}{c + n + 1} = Z_n.$$

且 $0 \leq Z_n \leq 1$ 。由 bounded martingale convergence theorem, $Z_n \xrightarrow{a.s.} Z_\infty$ 且在 L^1 中收敛。

设 $q_n = \mathbb{E}[Z_n(1 - Z_n)]$, 并令 $t = c + n$ 。直接条件计算得

$$\mathbb{E}[Z_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n] = Z_n^2 + \frac{Z_n(1 - Z_n)}{(t + 1)^2},$$

故

$$q_{n+1} = q_n \left(1 - \frac{1}{(t + 1)^2}\right).$$

由于 $q_0 = ab/c^2$, 望远镜乘积给出

$$q_n = \frac{ab(c + n + 1)}{c(c + 1)(c + n)} \rightarrow \frac{ab}{c(c + 1)}.$$

有界性还给出 L^2 收敛, 因此

$$\mathbb{E}Z_\infty^2 = \mathbb{E}Z_\infty - \mathbb{E}[Z_\infty(1 - Z_\infty)] = \frac{a(a + 1)}{c(c + 1)}.$$

最终

$$\text{Var}(Z_\infty) = \frac{ab}{c^2(c + 1)} > 0,$$

所以极限不是常数。

Scoring guide (10 points). 鞅验证 3 分、收敛定理 1 分; 二阶递推 3 分、望远镜乘积 1 分、方差与非退化结论 2 分。

Problem 4**15 points**

对满足 $B_t = x < a$ 且路径在 t 前达到 a 的轨道, 在首次达到 a 后作反射, 得到终点 $2a - x > a$ 的 Brownian 轨道。该映射保测度且可逆。因此对 $b < a$,

$$\mathbb{P}(M_t \geq a, B_t \leq b) = \mathbb{P}(B_t \geq 2a - b).$$

由同一公式, 对 $x < m$,

$$\mathbb{P}(M_t \leq m, B_t \in dx) = \{\varphi_t(x) - \varphi_t(2m - x)\} dx.$$

对 m 求导, 得到联合密度

$$f_{M_t, B_t}(m, x) = \frac{2(2m - x)}{t} \varphi_t(2m - x), \quad m > 0, x < m,$$

其余处为零。边界集合的概率为零。

定义反向增量 $\tilde{B}_u = B_t - B_{t-u}$, $0 \leq u \leq t$ 。它仍为标准 Brownian motion, 故

$$M_t - B_t = \max_{0 \leq u \leq t} (-\tilde{B}_u) \stackrel{d}{=} M_t \stackrel{d}{=} |B_t|.$$

最后

$$\mathbb{E}(M_t - B_t) = \mathbb{E}|N(0, t)| = \sqrt{\frac{2t}{\pi}}.$$

Scoring guide (15 points). 反射映射及概率恒等式 5 分; 分布微分 3 分、正确支持与联合密度 3 分; 时间反演 2 分、半正态均值 2 分。

Problem 5**15 points**

记 $U_i = 2X_i - 1$ 。有

$$\mathbb{E}_\theta X_i = \frac{1}{2} + \frac{\theta}{6}, \quad \text{Var}_\theta(X_i) = \frac{1}{12} - \frac{\theta^2}{36}.$$

原始矩估计为 $6\bar{X} - 3$; 令 $\tilde{\theta}_n$ 为它到 $[-r, r]$ 的投影。真参数在内部, 因此投影以概率趋于 1 不发生, LLN 与 CLT 给出

$$\tilde{\theta}_n \xrightarrow{p} \theta, \quad \sqrt{n}(\tilde{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N(0, 3 - \theta^2).$$

似然与 log-likelihood 为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n (1 + \theta U_i), \quad \ell(\theta) = \sum_{i=1}^n \log(1 + \theta U_i).$$

且

$$\ell'(\theta) = \sum_i \frac{U_i}{1 + \theta U_i}, \quad \ell''(\theta) = -\sum_i \frac{U_i^2}{(1 + \theta U_i)^2} < 0$$

几乎必然成立。故 MLE 唯一: 若 $\ell'(-r) \leq 0$, 则为 $-r$; 若 $\ell'(r) \geq 0$, 则为 r ; 否则为方程 $\ell'(\theta) = 0$ 在 $(-r, r)$ 内的唯一根。

单个观测的 Fisher information 是

$$I(\theta) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{u^2}{1+\theta u} du = -\frac{1}{\theta^2} + \frac{1}{2\theta^3} \log \frac{1+\theta}{1-\theta},$$

并按连续延拓令 $I(0) = 1/3$ 。共同支持固定，真参数为内点，密度在紧参数集上有正下界且前三阶导数可控制，因此 regular MLE theorem 适用：

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N(0, I(\theta)^{-1}).$$

信息不等式给出 $I(\theta)^{-1} \leq 3 - \theta^2$ ； $\theta = 0$ 时相等， $\theta \neq 0$ 时 score 不与矩估计的 influence function 成比例，故严格小于。

Scoring guide (15 points). 矩与估计量 2 分、相合和 CLT 3 分；likelihood/score 2 分、凹性及边界刻画 2 分；信息积分 3 分、正则条件与 MLE 极限 2 分、效率比较 1 分。

Problem 6

10 points

因为 $X - Y$ 的均值为零、方差为 2λ ,

$$\mathbb{E}U = \frac{1}{2} \mathbb{E}(X - Y)^2 = \lambda.$$

联合质量函数可写为

$$e^{-2\lambda} \lambda^{x+y} \frac{1}{x!y!},$$

所以由 factorization theorem, $T = X + Y$ 充分, 且 $T \sim \text{Poisson}(2\lambda)$ 。若 $\mathbb{E}_\lambda g(T) = 0$ 对所有 $\lambda > 0$ 成立, 则相应幂级数的每个系数为零, 故 $g(T) = 0$ a.s.; 因此 T 完全。

给定 $T = t$, $X \sim \text{Binomial}(t, 1/2)$ 且 $X - Y = 2X - t$, 所以

$$\mathbb{E}(U | T = t) = \frac{1}{2} \text{Var}(2X - t | T = t) = \frac{t}{2}.$$

由 Lehmann–Scheffé theorem, $T/2$ 是 λ 的 UMVU estimator。

令 $D = X - Y$ 。其第二、四累积量均为 2λ , 故

$$\mathbb{E}D^4 = 2\lambda + 12\lambda^2.$$

于是

$$\text{Var}(U) = \frac{1}{4} \{\mathbb{E}D^4 - (\mathbb{E}D^2)^2\} = \frac{\lambda}{2} + 2\lambda^2, \quad \text{Var}(T/2) = \frac{\lambda}{2}.$$

Scoring guide (10 points). 无偏性 1 分、充分与完全 2 分；条件二项分布 2 分、Rao–Blackwell 计算和 UMVU 2 分；两个方差各 1 分、比较 1 分。

Problem 7**15 points**

正规方程结合 $\sum x_i = 0$ 给出

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y}, \quad \hat{\beta}_1 = \frac{\sum_i x_i Y_i}{S_{xx}}.$$

它们是正态线性组合，协方差为零，故独立，且

$$\hat{\beta}_0 \sim N\left(\beta_0, \frac{\sigma^2}{n}\right), \quad \hat{\beta}_1 \sim N\left(\beta_1, \frac{\sigma^2}{S_{xx}}\right).$$

Cochran theorem 给出 $RSS/\sigma^2 \sim \chi_{n-2}^2$ ，并且 RSS 与两个估计量独立。

任一线性无偏 slope estimator 写成 $\sum c_i Y_i$ 时必须满足 $\sum c_i = 0$ 与 $\sum c_i x_i = 1$ 。由 Cauchy-Schwarz,

$$1 = \left(\sum c_i x_i\right)^2 \leq \left(\sum c_i^2\right) S_{xx},$$

故其方差至少为 σ^2/S_{xx} ；等号在 $c_i = x_i/S_{xx}$ 时达到，即 least-squares estimator 为 BLUE。

令 $t_{\nu,q}$ 表示 t_ν 分布的 q 分位数。精确区间为

$$\hat{\beta}_1 \pm t_{n-2,1-\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{S_{xx}}}.$$

对独立未来响应 $Y_0 = \beta_0 + \beta_1 x_0 + \varepsilon_0$ ，预测误差方差为 $\sigma^2(1 + 1/n + x_0^2/S_{xx})$ ，且与 s^2 独立。因此精确 prediction interval 为

$$\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0 \pm t_{n-2,1-\alpha/2} s \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{x_0^2}{S_{xx}}}.$$

Scoring guide (15 points). LS 公式与分布 3 分、RSS 和独立性 2 分；无偏约束 2 分、Cauchy-Schwarz 最优性 3 分；slope CI 2 分、prediction variance 2 分、区间 1 分。

Problem 8**10 points**

由共轭性，

$$p \mid X = x \sim \text{Beta}(A, B), \quad A = a + x, \quad B = b + m - x.$$

因 $a, b > 1$ ，有 $A, B > 1$ ，下面所需的逆矩均有限。后验风险中依赖 d 的部分为

$$d^2 \mathbb{E} \left[\frac{1}{p(1-p)} \mid x \right] - 2d \mathbb{E} \left[\frac{1}{1-p} \mid x \right].$$

严格凸性给出唯一极小点

$$d^* = \frac{\mathbb{E}[(1-p)^{-1} \mid x]}{\mathbb{E}([p(1-p)]^{-1} \mid x)}.$$

Beta 逆矩为

$$\mathbb{E} \frac{1}{1-p} = \frac{A+B-1}{B-1}, \quad \mathbb{E} \frac{1}{p(1-p)} = \frac{(A+B-1)(A+B-2)}{(A-1)(B-1)}.$$

所以

$$d^* = \frac{A-1}{A+B-2}.$$

后验均值是 $A/(A+B)$ ；交叉相乘可知二者相等当且仅当 $A=B$ 。

Scoring guide (10 points). 后验 3 分；后验风险展开和一阶条件 2 分、逆矩与有限性 2 分、Bayes estimator 1 分；与后验均值比较 2 分。