

概统博资考：拿到题后的 30 秒识别流程

现行范围：2026 秋及以前大纲；真题校准：2023 秋—2026 春

题型判断 → 分布/参数 → 独立性 → support → 公式/定理 → 核查条件 → 积分域/自由度/参数化			
题面信号	第一反应	立即写下	最容易丢分
联合密度/几何条件	先画 support，再边缘/条件/变换	$f_X = \int f_{X,Y} dy$ ；条件密度先归一化	把三角形/曲边域当矩形；密度可大于 1
求 $g(X, Y)$ 分布	CDF 或补变量 + Jacobian；和用卷积	$f_{U,V} = f_{X,Y}(x(u, v), y(u, v)) J $	漏逆映射、多对一分支、Jacobian 绝对值
max/min/分位数	CDF + 次序统计量；离散分位数先看跳跃	$F_{X_{(n)}} = F^n, F_{X_{(1)}} = 1 - (1 - F)^n$	经验分位数在跳点未必相合
$n \rightarrow \infty$ 、光滑函数	LLN/CLT + CMT/Slutsky/Delta	$\sqrt{n}\{g(T_n) - g(\theta)\} \Rightarrow g'(\theta)Z$	缺矩条件； $g'(\theta) = 0$ 仍套一阶 Delta
重尾/稀有大跳/三角阵	先算方差与归一化，再查 Lindeberg；必要时 CF	$s_n^2 = \sum \text{Var } X_{n,k}$	未先验证最大项可忽略；机械用 iid CLT
首达/停时/随机游动	构造指数鞅或调和函数，截断停时	$M_n = e^{tS_n} / M_X(t)^n$ ；先用 $\tau \wedge N$	未证停时/可积/UI 就用 OST
Markov/平稳	写转移核，查不可约/周期/常返	$\pi P = \pi$ ；可逆时 $\pi_i P_{ij} = \pi_j P_{ji}$	有平稳分布不自动推出从任意初值收敛
“充分/极小/完全/UMVUE”	因子分解 → 似然比判据 → 完全性 → LS	$f_\theta(x) = g_\theta(T)h(x)$ ； $\mathbb{E}_\theta g(T) = 0 \Rightarrow g = 0$	sufficient、minimal、complete 三者混同
MLE/参数边界/support 含参数	先写参数可行域和似然全局形状	$\hat{\theta} \in \arg \max_{\theta \in \Theta} L(\theta; x)$	只解 score；漏“不存在/不唯一/边界上确界”
“size α / UMP”	simple-simple 用 NP；一侧指数族查 MLR	$L(\theta_1)/L(\theta_0) > k$ ；写功效与最不利 H_0	NP 只管 simple vs simple；离题漏随机化
Bayes/决策	先验 $\times$ 似然；按损失最小化后验风险	平方损失后验均值；绝对损失后验中位数	MAP 不是普遍 Bayes；MAP 不具重参数化不变性

交卷前 20 秒 / 选题

support 与积分域； S^2 分母、 $t/\chi^2/F$ 自由度；Gamma rate/scale；检验 size/level。先圈恰好 8 题，优先能完整写条件与主链条者；超过 8 题只批最先作答的 8 题。

概率基础、条件化与数字特征

条件期望是概率部分与 Rao–Blackwell/Bayes 的共同接口

条件概率 / Bayes

【看到】 分层来源、误判率、后验类别。 **【想到】** 全概率作分母。

$$\mathbb{P}(A) = \sum_j \mathbb{P}(A \mid B_j) \mathbb{P}(B_j),$$

$$\mathbb{P}(B_k \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid B_k) \mathbb{P}(B_k)}{\sum_j \mathbb{P}(A \mid B_j) \mathbb{P}(B_j)}.$$

【做】 写清 $\{B_j\}$ 是分割、分母 > 0 ；先联合后归一。 **【错】** 把 $\mathbb{P}(A \mid B)$ 与 $\mathbb{P}(B \mid A)$ 对调。

独立性判定

事件： $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B)$ 。连续变量：联合 support 必须等于边缘 support 的笛卡尔积，且 $f_{X,Y} = f_X f_Y$ a.e.；离散同理。

$$X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow \mathbb{E}[g(X)h(Y)] = \mathbb{E}g(X)\mathbb{E}h(Y)$$

对所有有界可测 g, h 成立时也可反推独立。联合高斯中特例： $\text{Cov}(X, Y) = 0 \iff X \perp\!\!\!\perp Y$ 。

期望、方差、协方差

$$\mathbb{E}g(X) = \int g dF_X, \quad \text{Var } X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2,$$

$$\text{Var}\left(\sum a_i X_i\right) = \sum a_i^2 \text{Var } X_i + 2 \sum_{i < j} a_i a_j \text{Cov}(X_i, X_j).$$

尾积分 ($X \geq 0$)： $\mathbb{E}X^p = p \int_0^\infty t^{p-1} \mathbb{P}(X > t) dt$ 。计数问题： $N = \sum_j \mathbf{1}_{A_j}$ ，故 $\mathbb{E}N = \sum_j \mathbb{P}(A_j)$ ，不需要独立。

常用不等式

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \mathbb{E}X/a \quad (X \geq 0),$$

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \geq t) \leq \sigma^2/t^2,$$

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \geq t) \leq \mathbb{E}|X - \mu|^p/t^p,$$

$$\phi(\mathbb{E}X) \leq \mathbb{E}\phi(X) \quad (\phi \text{ 凸}),$$

$$|\mathbb{E}XY| \leq (\mathbb{E}X^2 \mathbb{E}Y^2)^{1/2}.$$

指数尾： $\mathbb{P}(X \geq x) \leq \inf_{t>0} e^{-tx} M_X(t)$ 。

条件期望：定义与操作

【看到】 “给定 σ -代数/信息/统计量”。 **【写】** $Y = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$ 满足： Y 为 $\mathcal{G}$ -可测，且

$$\int_G Y d\mathbb{P} = \int_G X d\mathbb{P}, \quad \forall G \in \mathcal{G}.$$

- 取出已知量： $\mathbb{E}[ZX \mid \mathcal{G}] = Z\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$ (Z 可测且可积条件足够)。
- Tower： $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ 时， $\mathbb{E}\{\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \mid \mathcal{H}\} = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{H})$ 。
- 独立删除： $X \perp\!\!\!\perp \mathcal{G} \Rightarrow \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}X$ 。
- 条件 Jensen： $\phi(\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]) \leq \mathbb{E}[\phi(X) \mid \mathcal{G}]$ 。

全期望 / 全方差 / 全协方差

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}\{\mathbb{E}(X \mid Y)\},$$

$$\text{Var } X = \mathbb{E}\{\text{Var}(X \mid Y)\} + \text{Var}\{\mathbb{E}(X \mid Y)\},$$

$$\text{Cov}(X, Z) = \mathbb{E}\{\text{Cov}(X, Z \mid Y)\} + \text{Cov}\{\mathbb{E}(X \mid Y), \mathbb{E}(Z \mid Y)\}.$$

给定 $Y = y$ 的连续情形： $f_{X|Y}(x \mid y) = f_{X,Y}(x, y)/f_Y(y)$ ，只在 $f_Y(y) > 0$ 且相应条件 support 上。

积分与极限交换

【看到】 $\lim \mathbb{E}X_n$ 、随机级数、二重积分。 **【想到】** 依次检查：

- $0 \leq X_n \uparrow X$ ：MCT；
- $X_n \geq 0$ ：Fatou 只给 $\mathbb{E} \liminf X_n \leq \liminf \mathbb{E}X_n$ ；
- $X_n \rightarrow X$ a.s. 且 $|X_n| \leq Y \in L^1$ ：DCT；
- 非负和/积分：Tonelli；绝对可积：Fubini；
- $X_n \xrightarrow{P} X$ 加一致可积： $X_n \rightarrow X$ in L^1 。

概率基础必坑

独立 $\Rightarrow$ 不相关（需二阶矩），反之一般不成立；条件独立 $\neq$ 无条件独立；连续变量单点概率为 0；CDF 连续不等于一定有 density；两两独立不等于相互独立。

多维分布、函数变换与次序统计量

先画 support；变换题的分数通常死在区域与分支

联合 $\rightarrow$ 边缘 / 条件

【看到】 “求边缘、条件、独立”。 **【做】**

- 1. 画 $S = \{(x, y) : f(x, y) > 0\}$;
 - 2. 固定 x 求允许的 y 区间 S_x ;
 - 3. $f_X(x) = \int_{S_x} f_{X,Y}(x, y)dy$;
 - 4. $f_{Y|X}(y | x) = f_{X,Y}(x, y)/f_X(x)$;
 - 5. 看联合能否在乘积 support 上分解。
- 【错】积分上下限机械写 $\pm\infty$; 条件密度忘记重新写 support。

一维/多维变换

【看到】 $U = g(X)$ 。非单调优先 CDF: $F_U(u) = \mathbb{P}(g(X) \leq u)$, 再求导。若每个 u 有有限个原像 x_j :

$$f_U(u) = \sum_j f_X(x_j) \left| \frac{dx_j}{du} \right|.$$

二维一一变换 $(U, V) = T(X, Y)$:

$$f_{U,V}(u, v) = f_{X,Y}(x(u, v), y(u, v)) \left| \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|.$$

【做】变换 $\rightarrow$ 逆变换 $\rightarrow$ 新 support $\rightarrow$ Jacobian $\rightarrow$ 边缘化。

卷积

【看到】“独立连续变量之和”。

$$f_{X+Y}(z) = \int f_X(x)f_Y(z-x)dx,$$

积分域为 $x \in S_X \cap (z - S_Y)$ 。差: $f_{X-Y}(z) = \int f_X(x)f_Y(x-z)dx$ 。离散型把积分换求和。

次序统计量

iid 连续样本 CDF F 、density f :

$$f_{X_{(k)}}(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} F^{k-1}(x)[1-F(x)]^{n-k} f(x).$$

极值联合密度 ($x < y$):

$$f_{X_{(1)}, X_{(n)}}(x, y) = n(n-1)[F(y)-F(x)]^{n-2} f(x)f(y).$$

$F(X_{(k)}) \sim \text{Beta}(k, n+1-k)$ 。经验 p 分位数: 连续且 $f(\xi_p) > 0$ 时

$$\sqrt{n}(\hat{\xi}_p - \xi_p) \Rightarrow N\left(0, \frac{p(1-p)}{f(\xi_p)^2}\right).$$

多元正态: 一眼公式

$X \sim N_d(\mu, \Sigma)$, $AX + b \sim N(A\mu + b, A\Sigma A^T)$ 。任意线性组合正态是定义性判据。分块 $X = (X_1^T, X_2^T)^T$:

$$X_1 | X_2 = x_2 \sim N(\mu_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(x_2 - \mu_2), \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}).$$

回归分解: $X_1 = \mu_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(X_2 - \mu_2) + R$, 且 $R \perp\!\!\!\perp X_2$ 。

高斯指数倾斜 (26S 真题型)

若 $X \sim N_d(\mu, V)$, 且

$$\frac{dQ}{dP} = \frac{e^{\alpha^T X}}{\mathbb{E}_P e^{\alpha^T X}},$$

则在 Q 下

$$X \sim N_d(\mu + V\alpha, V).$$

【做】用 MGF: $M_Q(t) = M_P(t + \alpha)/M_P(\alpha)$, 配方识别均值平移、协方差不变。

极坐标 / 比例和变换

极坐标: $x = r \cos \phi, y = r \sin \phi, |J| = r, r \geq 0$ 。若二维标准正态各向同性, 则 $R^2 \sim \chi_2^2, \Phi \sim U(0, 2\pi)$ 且独立; 非零相关时角度通常不均匀。

Beta-Gamma: 独立 $X \sim \Gamma(\alpha, \theta), Y \sim \Gamma(\beta, \theta)$ (同 scale), 则

$$S = X + Y \sim \Gamma(\alpha + \beta, \theta),$$

$$U = \frac{X}{X + Y} \sim \text{Beta}(\alpha, \beta), \quad S \perp\!\!\!\perp U.$$

变换必坑

Normal 缩放: 若 $Y = aX + b$, 标准差是 $|a|\sigma$; Jacobian 必取绝对值; 多对一变换要对所有原像求和; 联合 support 决定积分区间, 不能只看密度代数式。

收敛、LLN、CLT 与 Delta

六套真题持续高频: 先辨收敛模式, 再选定理

四种收敛与关系

$$X_n \xrightarrow{a.s.} X : \mathbb{P}(\lim X_n = X) = 1,$$

$$X_n \xrightarrow{P} X : \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \rightarrow 0,$$

$$X_n \rightarrow X \text{ in } L^p : \mathbb{E}|X_n - X|^p \rightarrow 0,$$

$$X_n \xrightarrow{d} X : F_{X_n}(x) \rightarrow F_X(x) \text{ (} F_X \text{ 连续点)}.$$

$$L^p \Rightarrow P, \quad a.s. \Rightarrow P \Rightarrow d.$$

若极限是常数, $X_n \Rightarrow c \iff X_n \xrightarrow{P} c$ 。 L^p 间用 Lyapunov: 概率空间上 $p > q \Rightarrow L^p \Rightarrow L^q$ 。

CMT / Slutsky

若 $X_n \Rightarrow X$ 且 g 在 X a.s. 所在点连续, 则 $g(X_n) \Rightarrow g(X)$ 。若 $X_n \Rightarrow X, Y_n \xrightarrow{P} c$, 则

$$X_n + Y_n \Rightarrow X + c, \quad X_n Y_n \Rightarrow cX, \quad X_n/Y_n \Rightarrow X/c \text{ (} c \neq 0\text{)}.$$

乘积依概率收敛: 分解 $X_n Y_n - XY = X_n(Y_n - Y) + Y(X_n - X)$, 先证 $X_n = O_P(1)$ 。

Borel-Cantelli

$$A_n \text{ i.o.} = \cap_m \cup_{n \geq m} A_n.$$

$$\sum \mathbb{P}(A_n) < \infty \Rightarrow \mathbb{P}(A_n \text{ i.o.}) = 0.$$

若 A_n 独立且 $\sum \mathbb{P}(A_n) = \infty$, 则 $\mathbb{P}(A_n \text{ i.o.}) = 1$ 。【看到】极值、limsup、稀有大跳。 【做】上界用可求和尾界; 下界选独立子序列并让概率和发散。

LLN

iid 且 $\mathbb{E}|X_1| < \infty$: $\bar{X}_n \xrightarrow{a.s.} \mu$ (SLLN)。若 iid、 $\text{Var } X_1 < \infty$: Chebyshev 立得 WLLN。

独立非同分布常用充分条件: 若 $\sum_n \text{Var}(X_n)/n^2 < \infty$ 且均值适当, 则 $(S_n - \mathbb{E}S_n)/n \rightarrow 0$ a.s. (Kolmogorov + Kronecker)。

经典 CLT / 多元 CLT

iid、 $\mathbb{E}X = \mu, 0 < \sigma^2 < \infty$:

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \Rightarrow N(0, 1).$$

iid 向量 $X_i \in \mathbb{R}^d$, 协方差 $\Sigma < \infty$:

$$\sqrt{n}(\bar{X} - \mu) \Rightarrow N_d(0, \Sigma).$$

证明骨架: 标准化: $\phi(t/\sqrt{n}) = 1 - t^2/(2n) + o(n^{-1})$; 取 n 次方: Lévy 连续性。

三角阵 / 非标准 CLT

独立中心阵列 $X_{n,k}, s_n^2 = \sum_k \text{Var } X_{n,k}$ 。若对每个 $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{s_n^2} \sum_k \mathbb{E}[X_{n,k}^2 \mathbf{1}_{\{|X_{n,k}| > \varepsilon s_n\}}] \rightarrow 0,$$

则 $\sum_k X_{n,k}/s_n \Rightarrow N(0, 1)$ 。【做】先算 s_n ; 逐类取值检查“大跳”贡献; 重尾 iid 若方差无穷, 可能需从 $n\{1 - \phi(t/a_n)\}$ 选 a_n 。

Delta 方法

若 $\sqrt{n}(T_n - \theta) \Rightarrow N(0, V)$, g 在 θ 可微:

$$\sqrt{n}\{g(T_n) - g(\theta)\} \Rightarrow N(0, Dg(\theta)VDg(\theta)^T).$$

一维即方差 $[g'(\theta)]^2 V$ 。若 $g'(\theta) = 0, g''(\theta) \neq 0$:

$$n\{g(T_n) - g(\theta)\} \Rightarrow \frac{1}{2}g''(\theta)Z^2.$$

极限定理必坑

相合性只描述 $n \rightarrow \infty$; 依分布收敛不推出矩收敛; a.s. 收敛不能单独交换期望; CLT 必须中心化并用正确方差; Delta 的导数在真参数处取; 非正则极值常是 n 速度而非 $\sqrt{n}$ 。

鞅、停时与可选停止

近五套连续出现: 先检查定义, 再谈任何停止结论

判定鞅

【看到】“自然 filtration、条件期望保持”。 M_n 对 $(\mathcal{F}_n)$ 为鞅需:

- 1. M_n 为 $\mathcal{F}_n$ -可测 (适应);
- 2. $\mathbb{E}|M_n| < \infty$;
- 3. $\mathbb{E}(M_{n+1} | \mathcal{F}_n) = M_n$ 。

下鞅把等号改 $\geq$ 。若 ϕ 凸且可积, $\phi(M_n)$ 是下鞅; 严格凸等号常迫使增量退化。

指数鞅模板

iid 增量 X_k , $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, $m(t) = \mathbb{E}e^{tX_1} < \infty$:

$$M_n(t) = \frac{e^{tS_n}}{m(t)^n} = \exp\{tS_n - n \log m(t)\}$$

是自然 filtration 下鞅。连续 Brownian:

$$\exp\{uB_t - \tfrac{1}{2}u^2t\}$$

为鞅。【做】首达概率/Laplace 变换: 先停在 $\tau \wedge N$ 或 $\tau \wedge T$, 再说明极限交换。

停时判定

τ 是停时: $\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ (连续时间同理)。首达时

$$\tau_A = \inf\{n \geq 0 : X_n \in A\}$$

在适应过程的常规可测条件下是停时; “最后一次到达”通常不是, 因为需要未来信息。

可选停止: 可用版本

若 M_n 鞅, $\sigma \leq \tau$, 以下任一常用条件足够推出 $\mathbb{E}M_\tau = \mathbb{E}M_\sigma$:

- τ 有界;
- $(M_{n \wedge \tau})$ 一致可积;
- $\mathbb{E}\tau < \infty$ 且增量一致有界 (相应版本);
- M_n UI 且停时有限 a.s.。

永远安全的第一步: 对 $\tau \wedge N$ 用有界版本, 再处理 $N \rightarrow \infty$ 。

简单随机游动 / 赌徒破产

$S_n = i + \sum_{k=1}^n \xi_k$, $\mathbb{P}(\xi = 1) = p, q = 1 - p$, $\tau = \tau_0 \wedge \tau_N$ 。命中 N 的概率 h_i 解

$$h_i = ph_{i+1} + qh_{i-1}, \quad h_0 = 0, h_N = 1.$$

因此

$$h_i = \begin{cases} i/N, & p = q = 1/2, \\ \frac{1 - (q/p)^i}{1 - (q/p)^N}, & p \neq q. \end{cases}$$

对称时 S_n 与 $S_n^2 - n$ 均为鞅, 故 $\mathbb{E}_i\tau = i(N - i)$ 。

首达生成函数

对称游动从 0 首达 $\{-a, b\}$, 设 $u_i(s) = \mathbb{E}_i[s^\tau]$:

$$u_i(s) = \tfrac{s}{2}\{u_{i-1}(s) + u_{i+1}(s)\}, \quad u_{-a} = u_b = 1.$$

或取 λ 使 $s \cosh \lambda = 1$, 对 $s^ne^{\lambda S_n}$ 停止。先解边界方程, 再由 $s \uparrow 1$ 求命中概率/矩 (若可微与可积)。

鞅收敛 / Doob

非负上鞅 (或 L^1 有界下鞅) 在适当条件下 a.s. 收敛; 若 $\sup_n \mathbb{E}|M_n|^p < \infty$ ($p > 1$), 则 UI 且在 L^p 中收敛。

$$\mathbb{P}\left(\max_{k \leq n} |M_k| \geq \lambda\right) \leq \frac{\mathbb{E}|M_n|}{\lambda},$$

$$\mathbb{E} \max_{k \leq n} |M_k|^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}|M_n|^p.$$

OST 四连问

是否适应? 是否可积? τ 是否停时? 为什么能从 $\tau \wedge N$ 放到 τ ? “ $\tau < \infty$ a.s.” 本身通常不够。还要警惕把局部鞅直接当真鞅、把下鞅等式当鞅等式。

Markov 链、Poisson 过程、Brownian 与分枝

现行大纲明确要求: 真题按首达、平稳、缩放与生成函数命题

离散 Markov 链

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_0, \dots, X_n) = P_{X_n j}.$$

随机递推 $X_{n+1} = f(X_n, Z_{n+1})$ 、 Z_n iid 且独立过去, 则 $P(i, j) = \mathbb{P}(f(i, Z_1) = j)$ 。

【做】平稳分布: 解 $\pi P = \pi, \sum_i \pi_i = 1$ 。若找得到 detailed balance $\pi_i P_{ij} = \pi_j P_{ji}$, 立即得平稳。有限不可约链存在唯一平稳分布; 再加非周期, $P^n(i, \cdot) \rightarrow \pi$ 。

常返/正常返/周期

$T_i^+ = \inf\{n \geq 1 : X_n = i\}$; 常返 iff $\mathbb{P}_i(T_i^+ < \infty) = 1$ iff $\sum_n P^n(i, i) = \infty$ 。正常返还需 $\mathbb{E}_i T_i^+ < \infty$, 且不可约正常返链

$$\pi_i = \frac{1}{\mathbb{E}_i T_i^+}.$$

周期 $d(i) = \gcd\{n \geq 1 : P^n(i, i) > 0\}$; 不可约类内相同。树上简单游动常用 “到根距离” 的偏游动或有效电阻判暂留。

Poisson 过程 rate λ

$N(0) = 0$; 独立平稳增量; $N(t) - N(s) \sim \text{Pois}(\lambda(t - s))$ 。

- 间隔 $S_i \stackrel{iid}{\sim} \text{Exp}(\lambda)$ (rate);
- 到达时刻 $T_n = \sum_{i=1}^n S_i \sim \Gamma(n, \text{rate } \lambda)$;
- $\{N(t) \geq n\} = \{T_n \leq t\}$;
- 给定 $N(t) = n$, 到达时刻是 n 个 $U(0, t)$ 的次序统计量;
- 独立叠加 rates 相加; p -稀疏化得 rate $p\lambda$;
- $N(t) - \lambda t$ 为鞅。

Brownian motion

$B_0 = 0$; 连续路径; 独立平稳高斯增量, $B_t - B_s \sim N(0, t - s)$ 。

$$(B_{ct})_{t \geq 0} \stackrel{d}{=} (\sqrt{c}B_t)_{t \geq 0}, \quad \text{Cov}(B_s, B_t) = \min(s, t).$$

反射原理 ($a > 0$):

$$\mathbb{P}\left(\sup_{s \leq t} B_s \geq a\right) = 2\mathbb{P}(B_t \geq a).$$

首达 $T_a = \inf\{t : B_t = a\}$:

$$\mathbb{E}e^{-\lambda T_a} = e^{-|a|\sqrt{2\lambda}}, \quad \mathbb{P}(T_a < \infty) = 1.$$

区间出口 $\tau = \inf\{t : B_t \notin (a, b)\}$, $x \in (a, b)$:

$$\mathbb{P}_x(B_\tau = b) = \frac{x - a}{b - a}, \quad \mathbb{E}_x\tau = (x - a)(b - x).$$

Brownian bridge / 条件高斯

$W_t = B_t - tB_1$, 则 $W_0 = W_1 = 0$, 中心高斯,

$$\text{Cov}(W_s, W_t) = \min(s, t) - st.$$

证明两个高斯过程有限维分布相同: 只需逐项核对均值与协方差矩阵。正半轴吸收密度用反射: $p_t(x, y) - p_t(x, -y)$ ($x, y > 0$)。

Galton–Watson

后代 PGF $f(s) = \mathbb{E}s^X$, $Z_0 = 1$:

$$\mathbb{E}(s^{Z_{n+1}} \mid \mathcal{F}_n) = f(s)^{Z_n}, \quad \mathbb{E}Z_n = m^n, \quad \mathbb{E}s^{Z_n} = f^{\circ n}(s).$$

灭绝概率 q 是 $f(s) = s$ 在 $[0, 1]$ 的最小根; $m \leq 1 \Rightarrow q = 1$ (非退化常规条件), $m > 1 \Rightarrow q < 1$ 。边独立保留概率 p 后有效均值 pm , 临界 $p_c = 1/m$ 。

随机过程必坑

平稳分布存在 $\neq$ 极限分布必存在; 不可约还不够, 收敛常需非周期且正常返。Poisson 第 n 次到达是 Gamma, 不是 exponential。Brownian 的 T_a 均值为无穷, 不能机械对 $B_{t \wedge T_a}$ 使用期待停结论求 $\mathbb{E}T_a$ 。

抽样分布、指数族与正态样本

精确分布与渐近分布必须分开写

正态样本三件套

$X_i \stackrel{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$,

$$\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n), \quad \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2, \quad \bar{X} \perp\!\!\!\perp S^2,$$

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}.$$

Cochran 骨架: 将高斯向量投影到 $\text{span}(\mathbf{1})$ 与其正交补; 正交高斯投影独立, 平方范数给 χ^2 。

χ^2, t, F 构造

若 $Z \sim N(0, 1)$, $U \sim \chi_\nu^2$ 且独立:

$$T = \frac{Z}{\sqrt{U/\nu}} \sim t_\nu.$$

若 $U \sim \chi_m^2, V \sim \chi_n^2$ 独立:

$$F = \frac{U/m}{V/n} \sim F_{m,n}, \quad F_{m,n}^{-1} \sim F_{n,m}.$$

分位数记 $\mathbb{P}(T \leq t_{\nu,p}) = p$ 、 $\mathbb{P}(\chi_\nu^2 \leq \chi_{\nu,p}^2) = p$ 。

随机样本与统计量

统计量不能含未知参数; 估计量是统计量, 估计值是代入观测后的数。 $S^2 = (n-1)^{-1} \sum (X_i - \bar{X})^2$ 无偏; $n^{-1} \sum (X_i - \bar{X})^2$ 是正态方差的 MLE。

样本矩联合渐近: 对 $W_i = (h_1(X_i), \dots, h_k(X_i))$ 用多元 CLT, 再对

$g(\bar{W})$ 用 Delta；样本相关系数即此模板。

指数族识别

一参数标准形：

$$f_{\eta}(x) = h(x) \exp\{\eta T(x) - A(\eta)\}.$$

iid 样本自然统计量 $\sum_i T(X_i)$ ；

$$A'(\eta) = \mathbb{E}_{\eta} T(X), \quad A''(\eta) = \text{Var}_{\eta} T(X).$$

满秩自然指数族且自然参数空间含开集时，常可用 Laplace 变换唯一性证完全性。弯曲指数族不能机械继承完全性。

常见指数族自然统计量

模型	iid 自然统计量
Bernoulli(p)	$\sum X_i$
Poisson(λ)	$\sum X_i$
Exp(rate λ)	$\sum X_i$
$\Gamma(\alpha, \text{scale } \theta)$, α 已知	$\sum X_i$
$N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 已知	$\sum X_i$
$N(\mu, \sigma^2)$, 二者未知	$(\sum X_i, \sum X_i^2)$
$U(0, \theta)$	$X_{(n)}$ （支持依参数，非正则）
shifted Exp(λ, α)	$(X_{(1)}, \sum X_i)$ （支持依参数）

抽样分布必坑
$\bar{X} \perp\!\!\!\perp S^2$ 是正态样本特性，不是任意总体事实。未知 σ 用 t ，已知 σ 用 Z 。 F 的分子/分母自由度随位置走； χ^2 方差区间两端会反序。
第一反应
看到 Normal sample 且未知 μ, σ^2 ：立即写“ $\bar{X} \perp\!\!\!\perp S^2, t/\chi^2$ pivots”；看到平方和：先做中心/正交投影，再识别自由度。

充分、极小充分、完全与 UMVUE

六套真题全覆盖：这是统计证明题的最高频结构

充分统计量：因子分解

【看到】“压缩数据且不损失参数信息”。在共同支配模型下， T 充分 iff

$$f_{\theta}(x) = g_{\theta}(T(x))h(x).$$

【做】写联合密度和完整 support；把所有含 θ 的部分塞进 $g_{\theta}(T)$ ；剩余为 h 。【错】support 含 θ 时直接忽略指标函数。

极小充分：似然比判据

在常规共同支配条件下，若

$$\frac{f_{\theta}(x)}{f_{\theta}(y)} \text{ 与 } \theta \text{ 无关} \iff T(x) = T(y),$$

则 T 极小充分。【做】先分别处理零密度/support；再把比值中 θ 依赖消掉，读出等价类。

完全性

T 完全：对任意可测 g ，

$$\mathbb{E}_{\theta} g(T) = 0 \quad \forall \theta \in \Theta \implies g(T) = 0 \text{ a.s. } \forall \theta.$$

常用证明：离散族展开为幂级数逐项系数为 0；Gamma/指数族用 Laplace 变换唯一性；Binomial/Poisson 用多项式/指数生成函数。

Rao–Blackwell

若 T 充分， W 为 $g(\theta)$ 的无偏估计，令 $\delta(T) = \mathbb{E}(W | T)$ ，则仍无偏；平方损失下

$$\text{Var } W = \mathbb{E} \text{Var}(W | T) + \text{Var } \mathbb{E}(W | T) \geq \text{Var } \delta(T).$$

一般凸损失由条件 Jensen 得风险不增。

Lehmann–Scheffé / Basu

若 T 完全且充分，且 $\delta(T)$ 无偏估计 $g(\theta)$ ，则 δ 是唯一（a.s.）UMVUE。

Basu：若 T 完全充分， A ancillary（分布不含 θ ），则 $T \perp\!\!\!\perp A$ 。不需要额外假设“极小充分”。

UMVUE 标准流水线

【看到】BUE/UMVU/“最佳无偏”。

1. 找充分统计量 T ；
2. 证明 T 完全；

3. 找任意简单无偏 W ；
4. 算 $\mathbb{E}(W | T)$ ，化为 T 的函数；
5. 用 Lehmann–Scheffé 收尾。

离散条件期望常转成超几何计数；指数样本给定总和时比例为 Dirichlet/Beta；Poisson 给定总和时分量为 Binomial/Multinomial。

两个高频构造

Poisson: $X_i \sim \text{Pois}(\lambda)$, $T = \sum X_i \sim \text{Pois}(n\lambda)$ 完全充分；

$$\mathbb{E}[(X_1)_k] = \lambda^k, \quad \mathbb{E}[(T)_k] = (n\lambda)^k,$$

故 λ^k 的 UMVUE 为 $(T)_k/n^k$ 。

Exponential(rate λ): $T = \sum X_i \sim \Gamma(n, \text{rate } \lambda)$ 完全充分；对 $\phi = \mathbb{P}_{\lambda}(X > x) = e^{-\lambda x}$ ，可从 $\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{X_1 > x\}} | T]$ 构造 UMVUE。

概念边界
sufficient $\neq$ complete; minimal sufficient $\neq$ complete; ancillary 不是“与参数统计量独立”的定义；Rao–Blackwell 必须真的取条件期望；Lehmann–Scheffé 必须 complete + sufficient。

点估计、MLE、Fisher 信息与 CRLB

先求存在性，再谈 score；先查正则性，再谈信息下界

矩估计 / MLE

矩法：选与参数同维的理论矩 $m_j(\theta) = \mathbb{E}_{\theta} X^j$ ，令 $m_j(\theta) = n^{-1} \sum X_i^j$ 并解；检查解落在 Θ 。

MLE：

1. 写 $L(\theta; x)$ 和含参数的 support；
2. 确定观测给出的可行参数集；
3. interior 用 score/Hessian；
4. 比较边界、端点与极限；
5. 明确 exists / unique / set-valued。

不变性：若 $\eta = g(\theta)$ 且目标可识别， $\hat{\eta} = g(\hat{\theta})$ （必要时在像空间最大化）。

评价估测量

偏差 $b_{\theta}(T) = \mathbb{E}_{\theta} T - g(\theta)$ ；

$$\text{MSE}_{\theta}(T) = \text{Var}_{\theta}(T) + b_{\theta}(T)^2.$$

相合： $T_n \xrightarrow{P} g(\theta)$ ；渐近无偏不等于相合。效率比较需同一目标、同一损失/渐近尺度；无偏不等于有效，MLE 不一定无偏。

Fisher 信息

单样本 score $U_1(\theta) = \partial_{\theta} \log f_{\theta}(X)$ ：

$$I_1(\theta) = \mathbb{E} U_1^2, \text{quad } I_n(\theta) = n I_1(\theta).$$

正则时 $\mathbb{E} U_1 = 0$ 且

$$I_1(\theta) = -\mathbb{E} \partial_{\theta}^2 \log f_{\theta}(X).$$

重参数 $\eta = g(\theta)$ （一维）： $I_{\eta}(\eta) = I_{\theta}(\theta)(d\theta/d\eta)^2$ 。多参数用 Jacobian 夹乘。

Cramér–Rao 下界

若 T 无偏估计 $g(\theta)$ ，且共同 support、可微、可交换微分积分、 $0 < I_n(\theta) < \infty$ ：

$$\text{Var}_{\theta}(T) \geq \frac{[g'(\theta)]^2}{I_n(\theta)}.$$

证明骨架： $\mathbb{E} T = g(\theta)$ 微分得 $\text{Cov}(T, U_n) = g'(\theta)$ ；Cauchy–Schwarz； $\text{Var } U_n = I_n$ 。等号 iff $T - g(\theta) = a(\theta) U_n$ a.s.

MLE 相合性模板

令 $M_n(\theta) = n^{-1} \ell_n(\theta)$ 。

1. LLN/ULLN: $M_n \rightarrow M(\theta) = \mathbb{E}_{\theta_0} \log f_{\theta}(X)$ ；
 2. KL: $M(\theta_0) - M(\theta) = D(P_{\theta_0} \| P_{\theta}) \geq 0$ ；
 3. 可识别性给唯一最大点 θ_0 ；
 4. 紧性/一致收敛 + argmax 定理得 $\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta_0$ 。
- 不能只写“由 LLN, MLE 相合”。

MLE 渐近正态

正则、真参数内点、信息正定、相合且余项可控：

$$0 = U_n(\hat{\theta}) = U_n(\theta_0) + H_n(\tilde{\theta})(\hat{\theta} - \theta_0), \\ \sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta_0) \Rightarrow N(0, I_1(\theta_0)^{-1}).$$

多参数协方差为 $I_1(\theta_0)^{-1}$ ；对 $g(\theta)$ 再用 Delta。

非正则模型

Uniform 端点、shifted exponential、开参数边界、混合/不可识别模型：score 均值零、CRLB、 $\sqrt{n}$ -正态、Wilks 可能失效。优先求极端次序统计量的精确尾概率；典型速度为 n ，极限常为 exponential/比值。

区间估计与检验基础

pivot 的分布必须不含未知参数；先定 exact 还是 asymptotic

枢轴量套路

【看到】“构造 $1 - \alpha$ 置信区间”。 【想到】找 $Q(X, \theta)$ 且其分布与 θ 无关。

1. 取 a, b 使 $\mathbb{P}(a \leq Q \leq b) = 1 - \alpha$ ；
2. 对不等式反解 θ ；
3. 保持不等号方向，若含倒数注意端点反序；
4. 报告精确/渐近覆盖率。

正态总体置信区间

目标/条件	$1 - \alpha$ 区间
μ, σ 已知	$\bar{X} \pm z_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$
μ, σ 未知	$\bar{X} \pm t_{n-1, 1-\alpha/2}S/\sqrt{n}$
σ^2, μ 未知	$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1, 1-\alpha/2}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1, \alpha/2}}\right)$

两个独立正态方差比用 F ；均值差按是否配对、方差是否已知/相等选择 Z/t /Welch。

大样本区间

若 $\sqrt{n}(T_n - \theta)/\hat{s} \Rightarrow N(0, 1)$ ：

$$T_n \pm z_{1-\alpha/2} \frac{\hat{s}}{\sqrt{n}}.$$

MLE Wald: $\hat{\theta} \pm z_{1-\alpha/2}/\sqrt{I_n(\hat{\theta})}$ 。比例 Wald 在边界差，优先 score/Wilson 或精确二项（材料若要求 exact）。

检验基本对象

检验函数 $\phi(x) \in [0, 1]$ ， $\phi = 1$ 表示拒绝。

$$\beta_\phi(\theta) = \mathbb{E}_\theta \phi(X) \quad (\text{power}),$$
$$\text{size}(\phi) = \sup_{\theta \in \Theta_0} \beta_\phi(\theta), \quad \text{level } \alpha : \text{size} \leq \alpha.$$

Type I: H_0 真却拒绝；Type II: H_1 真却不拒绝；对具体备择 θ , power = $1 - \beta_{II}(\theta)$ 。

p-value

给定观测统计量 t_{obs} , p -value 是在 H_0 下“至少同样极端”的尾概率（复合 H_0 常取上确界），是使当前观测恰被拒绝的最小显著性水平。

【错】 p -value 不是 $\mathbb{P}(H_0 \text{ 真} \mid X)$ ，也不是重复实验中犯 I 类错误的概率。

检验—区间对偶

若对每个 θ_0 有 level α 检验 ϕ_{θ_0} ，则

$$C(X) = \{\theta_0 : \phi_{\theta_0}(X) = 0\}$$

是覆盖率至少 $1 - \alpha$ 的置信集。单调检验反演时先解“哪些 θ_0 不被拒绝”，比死背区间稳。

区间/检验必坑

σ 已知/未知要分清； χ^2 区间上下分位数反序；pivot 分布不能含未知参数；置信区间的随机性在抽样前，不能把已算出的固定区间说成“以 $1 - \alpha$ 概率包含该固定参数”。

NP、MLR、UMP、LRT 与三大渐近检验

检验题必须写拒绝方向、临界值来源、size 与功效

Neyman–Pearson

【看到】simple $H_0 : \theta = \theta_0$ vs simple $H_1 : \theta = \theta_1$ 。 【写】最强 level α 检验拒绝当

$$\frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_0}(x)} > k,$$

边界 $= k$ 可按概率 γ 随机化，使 $\mathbb{E}_{\theta_0} \phi = \alpha$ 。

证明骨架：对任意 level α 的 ψ ，利用 $(\phi - \psi)(f_1 - kf_0) \geq 0$ 积分，得 $\mathbb{E}_1 \phi \geq \mathbb{E}_1 \psi$ 。

MLR / Karlin–Rubin

族关于 T 有单调似然比： $\theta_2 > \theta_1$ 时 $f_{\theta_2}/f_{\theta_1}$ 随 T 单调增加。则检验 $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$ 的 UMP level α 通常在 T 大时拒绝，临界值由边界 θ_0 定；单调递减则方向反转。

【做】若假设写在 $g(\theta)$ 上，先翻译回原参数并检查单调方向。

双侧 UMP

双侧问题通常不存在 UMP。证明套路：分别选左右两个 simple 备择；NP 唯一最强检验要求相反尾部；若同一检验 UMP 则必须同时等于两者，矛盾。双侧 LRT 存在不代表双侧 UMP 存在。

广义似然比

$$\Lambda(x) = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} L(\theta; x)}{\sup_{\theta \in \Theta} L(\theta; x)} \in [0, 1],$$

小 Λ 拒绝。正则、真参数为内点、维数差 r ：

$$-2 \log \Lambda \Rightarrow \chi_r^2.$$

【做】必须分别求受限/非受限 MLE；边界、支持依参数、不可识别时 Wilks 可能失效。

Wald / Score / LR

一维 $H_0 : \theta = \theta_0$ ：

$$W = I_n(\hat{\theta})(\hat{\theta} - \theta_0)^2,$$
$$S = \frac{U_n(\theta_0)^2}{I_n(\theta_0)}, \quad LR = 2\{\ell_n(\hat{\theta}) - \ell_n(\theta_0)\}.$$

正则 H_0 下均 $\Rightarrow \chi_1^2$ ，局部备择下一阶等价。Wald 对重参数敏感；LR 一一重参数不变；Score 不需拟合非受限参数（简单 H_0 ）。

常见精确检验

模型	H_0 下统计量
$N(\mu, \sigma^2)$, σ 已知	$Z = (\bar{X} - \mu_0)/(\sigma/\sqrt{n})$
$N(\mu, \sigma^2)$, σ 未知	$T = (\bar{X} - \mu_0)/(S/\sqrt{n})$
正态方差	$(n-1)S^2/\sigma_0^2 \sim \chi_{n-1}^2$
两正态方差比	$(S_1^2/\sigma_1^2)/(S_2^2/\sigma_2^2) \sim F$
Bernoulli	$\sum X_i \sim \text{Bin}(n, p_0)$ ；离散时可能随机化
Exp rate λ	$2\lambda_0 \sum X_i \sim \chi_{2n}^2$

检验作答 6 行模板

1. 参数假设与单/双侧；
2. 统计量及其单调方向；
3. 定理（NP/KR/LRT）及条件；
4. 拒绝域含随机化；
5. 临界值使最不利 H_0 下拒绝率为 α ；
6. 写功效函数并说明 UMP/MP/渐近 level。

检验必坑

Type I = 真 H_0 被拒；Type II = 假 H_0 未拒；power = $1 - \beta$ 。NP 只针对 simple vs simple。离散模型不随机化可能只能做到 level α 而非 size 恰为 α 。

Bayes、决策、渐近统计与线性模型边界

Bayes/决策近五套全出现；线性模型自 2027 春起正式入纲

后验与共轭

$$\pi(\theta \mid x) = \frac{L(\theta; x)\pi(\theta)}{\int L(u; x)\pi(u)du} \propto L(\theta; x)\pi(\theta).$$

后验风险 $\rho(a \mid x) = \mathbb{E}[L(\theta, a) \mid x]$ ；逐点最小化即 Bayes rule。

- 平方损失：后验均值；
- 绝对损失：后验中位数；
- 0–1 损失（离散）：后验众数；
- 加权平方损失：按权重后的后验矩比。

共轭更新（rate 记法）

模型/先验	后验
$X_i \sim \text{Bern}(p)$, $p \sim \text{Beta}(a, b)$	$p \mid x \sim \text{Beta}(a + S, b + n - S)$
$X_i \sim \text{Pois}(\lambda)$, $\lambda \sim \Gamma_{\text{rate}}(a, b)$	$\Gamma_{\text{rate}}(a + S, b + n)$
$X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$, $\lambda \sim \Gamma_{\text{rate}}(a, b)$	$\Gamma_{\text{rate}}(a + n, b + S)$
$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 已知, $\mu \sim N(m_0, v_0)$	$v_n^{-1} = v_0^{-1} + n/\sigma^2, m_n = v_n(m_0/v_0 + n\bar{x}/\sigma^2)$

minimax / admissible

风险 $R(\theta, \delta) = \mathbb{E}_\theta L(\theta, \delta(X))$ 。

- 若 δ 是 Bayes 且 $R(\theta, \delta) \equiv c$ ，常可由 $r_\pi \leq \sup_\theta R$ 证 minimax。
- 广义 Bayes: 用 proper priors π_k 逼近，若 Bayes risks $r_{\pi_k} \uparrow \sup R(\theta, \delta)$ ，则 minimax。
- proper prior 下 Bayes rule 若 a.s. 唯一且风险有限，常可推出 admissible（需模型条件）。
- 参数空间有约束时，投影估计量常逐点降低平方损失。

渐近估计/检验总链

$$\begin{aligned} \text{LLN/ULLN} &\Rightarrow \hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta_0, \\ \text{score CLT} + \text{Hessian LLN} &\Rightarrow \sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta_0) \Rightarrow N(0, I_1^{-1}), \\ \text{局部二次展开} &\Rightarrow LR, Wald, Score \Rightarrow \chi_r^2. \end{aligned}$$

统一条件清单：可识别；真参数内点；参数无关 support；二/三阶可微；可交换积分微分；信息有限正定；一致性与余项控制。

MAP 与不当先验

MAP 是对“所声明参数的后验密度”取众数；换元会乘 Jacobian，故 MAP 不具一般重参数化不变性。improper prior 只有在后验可归一化时才给 generalized Bayes rule；还要检查所需后验矩是否有限。

线性模型：仅边界速记

新版大纲自 2027 春正式加入；但 2024 秋真题已考基础 Gauss–Markov。现行备考只保留：

$$\begin{aligned} Y &= X\beta + \varepsilon, \quad \mathbb{E}\varepsilon = 0, \quad \text{Cov}(\varepsilon) = \sigma^2 I, \quad \text{rank } X = p, \\ \hat{\beta} &= (X^T X)^{-1} X^T Y, \quad \text{Cov}(\hat{\beta}) = \sigma^2 (X^T X)^{-1}. \end{aligned}$$

Gauss–Markov: 任意线性无偏 AY 可写 $A = (X^T X)^{-1} X^T + D$ 且 $DX = 0$ ，故协方差差 $\sigma^2 DD^T \succeq 0$ 。正态且 σ^2 已知： $I(\beta) = X^T X / \sigma^2$ 。

决策必坑

Bayes 不自动等于 minimax；常风险本身也不够，需 Bayes/极限 Bayes 下界。admissible 是“无规则处处不差且至少一点更好”。广义 Bayes 不自动 admissible。

高频证明骨架与材料核对提醒

写出条件、核心等式、收尾；不展开长证明

独立性 求边缘 $\rightarrow$ 核对称积 support $\rightarrow$ 证联合分解；或证联合变换/特征函数分解。**条件**：“不相关”仅联合高斯时可升级；两两独立不够。

期望恒等式 指示函数/尾积分 $\rightarrow$ Tonelli（非负）或 Fubini（绝对可积） $\rightarrow$ 逐项计算。**条件**：说明为何可交换和、积分、期望。

BC / 极值 a.s. 写 A_n 与 limsup $\rightarrow$ 估尾概率和；BC1 给上界，独立子序列 + BC2 给下界。**条件**：BC2 需独立或适当弱化；阈值两侧各做一次。

CLT / 三角阵 中心化 $\rightarrow$ 算 $s_n^2 \rightarrow$ 查 Lindeberg/CF 小量展开 $\rightarrow$ Lévy。**条件**：归一化先定；极限方差非零。

条件期望 候选量证 $\mathcal{G}$ -可测 $\rightarrow$ 对任意 $G \in \mathcal{G}$ 验积分等式 $\rightarrow$ 唯一性。**条件**：Tower 要有 $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ ；取出量需可测/可积。

鞅 / OST 适应 + 可积 + 条件期望 $\rightarrow$ 停在 $\tau \wedge N \rightarrow$ 用支配/UI/有界增量放极限。**条件**：“a.s. 有限停时”不单独保证 OST。

Markov / 平稳 独立新噪声把条件分布缩到当前态 $\rightarrow$ 写 P ；解 $\pi P = \pi$ 或 detailed balance。**条件**：收敛还查不可约、非周期、正常返。

充分 / 极小 联合 density 因子分解；极小充分用 $f_\theta(x)/f_\theta(y)$ 的参数无关等价类。**条件**：共同支配与 support；零密度点单独处理。

完全性 设 $\mathbb{E}_\theta g(T) = 0$ 全部 $\theta \rightarrow$ 幂级数/Laplace 变换恒零 $\rightarrow$ 唯一性得 $g = 0$ a.e. **条件**：“对所有 θ ”与 integrability 不可省。

Rao–Blackwell $\delta = \mathbb{E}(W | T) \rightarrow$ Tower 保无偏 $\rightarrow$ 全方差/条件 Jensen 降风险。**条件**： T 充分使改进量不含未知参数。

Lehmann–Scheffé 构造完全充分 T 的无偏函数；任一 UMVUE Rao–Blackwell 到 T ；差期望恒零，完全性给唯一。**条件**：complete + sufficient。

MLE 相合 归一化 log-likelihood 一致收敛 $\rightarrow$ KL 唯一极大 $\rightarrow$ argmax。**条件**：可识别、紧性/分离；不能只用点态 LLN。

MLE 渐近正态 score 真值 Taylor $\rightarrow$ score CLT $\rightarrow$ Hessian LLN $\rightarrow$ Slutsky。**条件**：内点、正则、信息正定、相合与余项。

CRLB 微分 $\mathbb{E}T = g(\theta) \rightarrow \text{Cov}(T, U) = g' \rightarrow$ Cauchy–Schwarz。**条件**：support 参数无关、可交换微分积分、 $0 < I < \infty$ 。

NP / UMP LR 阈值 $\rightarrow (\phi - \psi)(f_1 - kf_0) \geq 0$ 积分；复合一侧再用 MLR/KR。**条件**：NP 是 simple-simple；边界可随机化；写功效与 size。

minimax 算风险上界 $C \rightarrow$ proper priors 使 Bayes risk $\uparrow C \rightarrow$ 任意规则最大风险 $\geq C$ 。**条件**：常风险需配合 Bayes/极限 Bayes。

材料核对提醒

- 中文现行/新版考纲写“变量和协方差”，英文对应为“Variance and covariance”，应读作“方差和协方差”。
- Gamma 在材料中同时出现 rate/scale；本文默认 $\Gamma(\alpha, \theta)$ 为 shape-scale，凡 rate 均明确写 Γ_{rate} 。
- 几何/负二项支撑有两套习惯；本文 Geom 表示首次成功试验次数（从 1），NegBin 表示第 r 次成功前失败数（从 0）。

范围核对提醒

- 2027 春新版唯一实质新增模块是线性模型；但 2024 秋 Q8 已提前考 Gauss–Markov/Fisher 信息。
- 复习讲义自述覆盖 2024S–2026S 五套，未纳入目录中另有的 2023F；本文已从原卷补入其 Markov/渗流、随机矩阵、正态 UMP、Cauchy 极小充分与非唯一 MLE 信号。
- 讲义提示其统计分布汇总页有疑似排版/转录错误；本文分布公式按 PMF/PDF 重新核验，不沿用可疑条目。

概统终极公式速查 I：离散分布

统一记号： $q = 1 - p$ ；MGF 为 $M_X(t) = \mathbb{E}e^{tX}$

Bernoulli(p) $p^x q^{1-x}$, $x \in \{0, 1\}$; $\mathbb{E}X = p$, $\text{Var } X = pq$; $M = q + pe^t$; $X^k = X$ ，独立和为 Binomial。

Binomial(n, p) $\binom{n}{x} p^x q^{n-x}$, $x = 0:n$; $\mathbb{E} = np$, $\text{Var} = npq$; $M = (q + pe^t)^n$; $np \rightarrow \lambda, p \rightarrow 0$ 时近 Pois。

Poisson(λ) $e^{-\lambda} \lambda^x / x!$, $x \geq 0$; $\mathbb{E} = \text{Var} = \lambda$; $M = \exp\{\lambda(e^t - 1)\}$ ；独立和参数相加， $\mathbb{E}(X)_k = \lambda^k$ 。

Geom(p) pq^{k-1} , $k \geq 1$; $\mathbb{E} = 1/p$, $\text{Var} = q/p^2$; $M = pe^t / (1 - qe^t)$, $t < -\log q$ ；首次成功次数、无记忆。

NegBin(r, p) $\binom{k+r-1}{k} p^r q^k$, $k \geq 0$; $\mathbb{E} = rq/p$, $\text{Var} = rq/p^2$; $M = [p/(1 - qe^t)]^r$ ；第 r 次成功前失败数。

Multinomial(n, p) $n! \prod p_j^{x_j} / \prod x_j!$, $\sum x_j = n$; $\mathbb{E}X_j = np_j$, $\text{Var } X_j = np_j(1 - p_j)$, $\text{Cov}(X_i, X_j) = -np_i p_j$ ；联合 MGF $(\sum p_j e^{t_j})^n$ 。

Discrete Uniform $\{1, \dots, m\}$ $p(x) = 1/m$; $\mathbb{E} = (m+1)/2$, $\text{Var} = (m^2 - 1)/12$; $M = e^t(1 - e^{mt})/[m(1 - e^t)]$ ；未知上端点用 $X_{(n)}$, support 依参数。

PGF 与阶乘矩

非负整数值 X : $G_X(s) = \mathbb{E}s^X$,

$$G'_X(1) = \mathbb{E}X, \quad G_X^{(k)}(1) = \mathbb{E}(X)_k.$$

独立和的 PGF 相乘。复合和 $S = \sum_{i=1}^N X_i$ ($N \perp\!\!\!\perp X_i$):

$$G_S(s) = G_N(G_X(s)).$$

Poisson / Binomial 条件结构

独立 $X_i \sim \text{Pois}(\lambda_i)$, $T = \sum X_i$:

$$T \sim \text{Pois}(\lambda_+), \quad (X_1, \dots, X_k) | T = n \sim \text{Mult}\left(n; \frac{\lambda_i}{\lambda_+}\right).$$

因此 $X_1 | T = n \sim \text{Bin}(n, \lambda_1/\lambda_+)$ 。这是 Poisson UMVUE 条件化的快捷键。

离散题三步

【看到】求分布/期望/检验。 【做】

1. 写 support，尤其 Geom/NegBin 的 0/1 起点；
2. 识别 iid 和、条件于总数、生成函数；

3. 离散检验检查临界点随机化。

离散分布易错
Poisson 参数既是均值也是方差，但 Poisson 混合后通常不再是 Poisson；Binomial 各分量在 multinomial 中负相关；Geom 无记忆是 $\mathbb{P}(G > m + n \mid G > m) = \mathbb{P}(G > n)$ ，支撑定义改变时写法也随之改变。
近六套高频离散对象
Bernoulli/Binomial 用于 MLR、分位数、UMVUE；Poisson 用于随机指数矩、完整充分与复合参数；随机游动的 ± 1 增量用 MGF/指数鞅。先写生成函数往往比直接求和更快。

概统终极公式速查 II：连续分布

默认 $\Gamma(\alpha, \theta)$ 为 shape-scale；Exp 明确使用 rate λ

$U(a, b)$ $f = (b - a)^{-1}, a < x < b; \mathbb{E} = (a + b)/2, \text{Var} = (b - a)^2/12; M = (e^{tb} - e^{ta})/[t(b - a)]$ ；未知端点非正则，极值用 CDF。

Exp(rate λ) $f = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0; \mathbb{E} = 1/\lambda, \text{Var} = 1/\lambda^2; M = \lambda/(\lambda - t), t < \lambda$ ；无记忆、Poisson 等待时间。

$\Gamma(\alpha, \theta)$ $f = x^{\alpha-1} e^{-x/\theta} / [\Gamma(\alpha)\theta^\alpha], x > 0; \mathbb{E} = \alpha\theta, \text{Var} = \alpha\theta^2; M = (1 - \theta t)^{-\alpha}$ ；同 scale 和的 shape 相加。

Beta(α, β) $f = x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}/B(\alpha, \beta), 0 < x < 1; \mathbb{E} = \alpha/(\alpha + \beta), \text{Var} = \alpha\beta/[(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)]$ ； $M = {}_1F_1(\alpha; \alpha + \beta; t)$ 。

$N(\mu, \sigma^2)$ $f = (\sqrt{2\pi}\sigma)^{-1} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$ ； $\mathbb{E} = \mu, \text{Var} = \sigma^2; M = e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2}$ ；独立线性组合仍正态。

χ_ν^2 $f = x^{\nu/2-1} e^{-x/2} / [2^{\nu/2} \Gamma(\nu/2)], x > 0; \mathbb{E} = \nu, \text{Var} = 2\nu; M = (1 - 2t)^{-\nu/2}$ ；等于 $\Gamma(\nu/2, 2)$ 与 $\sum_1^\nu Z_i^2$ 。

t_ν $f = \Gamma((\nu+1)/2)[1+x^2/\nu]^{-(\nu+1)/2} / [\sqrt{\nu\pi}\Gamma(\nu/2)]$ ； $\mathbb{E} = 0 (\nu > 1), \text{Var} = \nu/(\nu-2) (\nu > 2)$ ；MGF 不存在； $Z/\sqrt{U/\nu}$ 。

$F_{m,n}$ support $x > 0; \mathbb{E} = n/(n-2) (n > 2), \text{Var} = 2n^2(m+n-2)/[m(n-2)^2(n-4)] (n > 4)$ ；MGF 不存在； $(U/m)/(V/n)$ ，倒数交换自由度。

Cauchy(θ, γ) $f = \{\pi\gamma[1 + ((x - \theta)/\gamma)^2]\}^{-1}$ ；均值、方差、MGF 均不存在；MLE 可不唯一，样本均值不相合于位置。

Beta–Gamma– χ^2 网络

$X \sim \Gamma(\alpha, \theta), Y \sim \Gamma(\beta, \theta), X \perp\!\!\!\perp Y$
 $X + Y \sim \Gamma(\alpha + \beta, \theta), \frac{X}{X + Y} \sim \text{Beta}(\alpha, \beta), \frac{X}{X + Y} \perp\!\!\!\perp (X + Y).$
 $\chi_\nu^2 = \Gamma(\nu/2, 2)$ ；若 $X \sim \Gamma(\alpha, \theta)$ ，则 $2X/\theta \sim \chi_{2\alpha}^2$ 。

Normal 线性与二次型

独立 $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ ：
 $\sum a_i X_i \sim N\left(\sum a_i \mu_i, \sum a_i^2 \sigma_i^2\right).$

$Z \sim N_d(0, I)$ ，对称幂等矩阵 A 的 rank 为 r ： $Z^T A Z \sim \chi_r^2$ 。两个正交投影交叉乘积为 0 时，相应高斯二次型独立（Cochran）。

分布关系一眼判定

- 等待时间/无记忆 $\rightarrow$ Exp；第 n 次到达 $\rightarrow$ Gamma(rate)。
- 正态平方和 $\rightarrow \chi^2$ ；标准正态除以独立均方根 $\rightarrow t$ ；两个独立均方比 $\rightarrow F$ 。
- 同 scale Gamma 的“比例 + 总和” $\rightarrow$ Beta 且独立。
- $U(0, 1)$ 次序统计量 $U_{(k)} \rightarrow \text{Beta}(k, n + 1 - k)$ 。

连续分布易错
Gamma 的 rate/scale 不混用；正态第二参数是方差；密度可以大于 1；连续单点概率为 0； t, F 的 MGF 一般不存在；正态缩放时标准差乘 $ a $ 。

概统终极公式速查 III：全卷压缩清单

最后 3 分钟：条件、support、方向、自由度、参数化

概率 / 变换

$$\mathbb{P}(B_k \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid B_k)\mathbb{P}(B_k)}{\sum_j \mathbb{P}(A \mid B_j)\mathbb{P}(B_j)}.$$
$$\text{Var } X = \mathbb{E} \text{Var}(X \mid Y) + \text{Var } \mathbb{E}(X \mid Y).$$

$$f_{X+Y}(z) = \int f_X(x)f_Y(z-x)dx,$$

$$f_U(u) = \sum_{x:g(x)=u} f_X(x) \left| \frac{dx}{du} \right|.$$

二维变换：逆映射 $\rightarrow$ 新 support $\rightarrow |\det \partial(x, y)/\partial(u, v)|$ 。

LLN / CLT / Delta

$$\mathbb{E}|X| < \infty \Rightarrow \bar{X} \xrightarrow{a.s.} \mu, \quad \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \Rightarrow N(0, 1),$$

$$\sqrt{n}\{g(T_n) - g(\theta)\} \Rightarrow N(0, DgVDg^T).$$

三角阵： $s_n^2 = \sum \text{Var } X_{nk}$ ，查 $s_n^{-2} \sum \mathbb{E}[X_{nk}^2 \mathbf{1}_{|X_{nk}| > \varepsilon s_n}] \rightarrow 0$ 。

随机过程

$$M_n(t) = e^{tS_n}/M_X(t)^n, \quad e^{uB_t - u^2 t/2}; \quad \text{OST 先停 } \tau \wedge N.$$

$$\pi P = \pi, \quad \pi_i P_{ij} = \pi_j P_{ji}; \quad T_n^{\text{Pois}} \sim \Gamma(n, \text{rate } \lambda).$$

$$\mathbb{P}(\sup_{s \leq t} B_s \geq a) = 2\mathbb{P}(B_t \geq a), \quad \mathbb{E}e^{-\lambda T_a} = e^{-|a|\sqrt{2\lambda}}.$$

GW： $\mathbb{E}(s^{Z_n}) = f^{\circ n}(s)$ ，灭绝率是 $f(q) = q$ 最小根。

抽样分布

$$\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n), \quad \bar{X} \perp\!\!\!\perp S^2,$$
$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}, \quad \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2.$$

次序： $f_{X_{(k)}} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} F^{k-1}(1-F)^{n-k} f$ 。

估计 / 信息 / UMVUE

$$\hat{\theta}_{MLE} \in \arg \max_{\theta \in \Theta} L(\theta; x), \quad I_n = nI_1 = n\mathbb{E}(\partial_\theta \log f)^2,$$

$$\text{Var}(T) \geq \frac{[g'(\theta)]^2}{I_n(\theta)}, \quad \sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta_0) \Rightarrow N(0, I_1^{-1}).$$

UMVUE：因子分解找充分 $\rightarrow$ 幂级数/Laplace 证完全 $\rightarrow$ 无偏 $W \rightarrow \mathbb{E}(W \mid T) \rightarrow \text{Lehmann-Scheffé}$ 。

置信区间

$$\mu: \bar{X} \pm z_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} \quad (\sigma \text{ 已知}),$$
$$\mu: \bar{X} \pm t_{n-1, 1-\alpha/2}S/\sqrt{n} \quad (\sigma \text{ 未知}),$$
$$\sigma^2: \left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1, \alpha/2}^2} \right).$$

通用： $\mathbb{P}(a \leq Q(X, \theta) \leq b) = 1 - \alpha$ ，再反解。

检验

$$\text{size} = \sup_{\Theta_0} \mathbb{P}_\theta(\text{reject}), \quad \text{power} = \mathbb{P}_\theta(\text{reject}).$$

NP: simple-simple 按 f_1/f_0 大拒绝；MLR + 单侧 $\Rightarrow$ Karlin–Rubin UMP；

$$\Lambda = \frac{\sup_{\Theta_0} L}{\sup_{\Theta} L}, \quad -2 \log \Lambda \Rightarrow \chi_r^2 \text{ (正则)}.$$

p -value 是 H_0 下尾概率，不是 $\mathbb{P}(H_0 \mid X)$ 。

最终红线
• support 是否依参数/外变量？ • Gamma rate/scale? Geom 从 0/1? Normal 第二参数？ • Fisher 是单样本还是 n 样本？CRLB/Wilks 正则条件？ • $t/\chi^2/F$ 自由度与区间端点顺序？ • NP 是否被误用到复合问题？离散临界点是否随机化？ • sufficient / minimal / complete / ancillary 是否混淆？

考场收尾句模板
“上述定理的条件已逐项满足，因此结论为（精确/渐近）……；临界值由最不利原假设参数下拒绝概率等于 α 确定；所有积分均在所述 support 上进行。”