

Mock Qualifying Examination 10

参考解答与评分要点

Problems 1–5 共 80 分；Problems 6–7 二选一，计 20 分。

Problem 1 [10 points]

答案是

$$\boxed{2^{-k}}.$$

先证 lower bound。事实上只需考虑

$$f_r(x) = x - r, \quad 0 < r < 1.$$

对任何尚未结束的 transcript，记仍可能的根构成区间 $[L, R]$ 。若下一次 query 位于该区间内，adversary 选择较长的一侧作为新的 possible-root interval，并返回与该侧相容的 sign；若 query 位于区间外，则返回由 monotonicity 强制的 sign，区间不变。于是每次 query 后长度至多只能缩短一半，故 k 次后仍有一个 transcript 满足

$$R - L \geq 2^{-k}.$$

可以把 r 取为最终区间内部任一点且避开有限个 queried points；函数 f_r 与全部 answers 相容。因此任何 certified output interval 必须包含整个 possible-root set，其 worst-case 长度至少为 2^{-k} 。query 恰好命中某个根的 branch 虽可提前终止，但 adversary 可避开这些有限点，所以不改变 worst case。

另一方面，每次 query 当前 bracket 的 midpoint，利用 strict monotonicity 保留发生 sign change 的一半。 k 次后 bracket 长度恰为 2^{-k} ，达到下界。

评分要点 (10 分) adversarial/decision-tree lower bound 6 分；相容函数与 equality edge case 2 分；达到下界的 midpoint algorithm 2 分。

Problem 2 [20 points]

记

$$q(x) = \sqrt{f''(x)}, \quad Q = \int_0^1 q(x) dx.$$

结论为

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 E_n = \frac{Q^2}{8}}.$$

先建立 local estimate。对 cell $J_i = [x_{i-1}, x_i]$ ，令 $h_i = x_i - x_{i-1}$ ，

$$m_i = \min_{J_i} f'', \quad M_i = \max_{J_i} f'',$$

并令 e_i 为该 cell 上的 maximum interpolation error。由于 f strictly convex，linear interpolant 位于 f 上方。标准 remainder formula 在 midpoint 给出下界，在任意点给出上界：

$$\boxed{\frac{m_i h_i^2}{8} \leq e_i \leq \frac{M_i h_i^2}{8}}. \quad (1)$$

先证 upper bound。选择 nodes 使

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} q(x) dx = \frac{Q}{n}, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (2)$$

因为 $q \geq \sqrt{m}$, 该 partition 的 mesh size 为 $O(n^{-1})$ 。设 ω_q 为 q 的 modulus of continuity。由 (1)–(2), uniformly in i ,

$$\sqrt{8e_i} \leq h_i \sqrt{M_i} \leq \frac{Q}{n} + h_i \omega_q(\max h_i) = \frac{1}{n}(Q + o(1)).$$

故

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} n^2 E_n \leq \frac{Q^2}{8}. \quad (3)$$

再证 lower bound。uniform grid 与 (1) 先给出 $E_n = O(n^{-2})$ 。取 near-minimizing partitions $\mathcal{T}_n$, 使

$$E(\mathcal{T}_n) \leq E_n + o(n^{-2}).$$

由 (1) 及 $m_i \geq m$,

$$\max_i h_i = O(n^{-1}).$$

于是 $M_i/m_i = 1 + o(1)$ uniformly。又

$$\int_{J_i} q(x) dx \leq h_i \sqrt{M_i} \leq \sqrt{8E(\mathcal{T}_n)} \sqrt{\frac{M_i}{m_i}} = \sqrt{8E(\mathcal{T}_n)}(1 + o(1)).$$

对所有 cells 求和,

$$Q \leq n \sqrt{8E(\mathcal{T}_n)}(1 + o(1)),$$

从而

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} n^2 E_n \geq \frac{Q^2}{8}. \quad (4)$$

(3)–(4) 证明 sharp asymptotic。由 (2) 定义的 partitions 是一族 asymptotically optimal grids; 其 limiting node density 正比于 $q = \sqrt{f''}$ 。这里没有声称 finite n 的 exact optimizer 必须逐 cell 满足 (2)。

评分要点 (20 分) local sharp comparison 4 分; 构造 (2) 及 limsup 5 分; near-minimizer mesh control 3 分; liminf 6 分; 常数与不夸大 uniqueness 2 分。

Problem 3 [20 points]

对任意 x , orthogonal decomposition 给出

$$\|Ax - b\|_2^2 = \|Rx - c\|_2^2 + \eta^2.$$

因此加入新 observation 后的 objective 等于

$$\eta^2 + \left\| \begin{bmatrix} R \\ a^T \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} c \\ \beta \end{bmatrix} \right\|_2^2. \quad (5)$$

依次用 n 个 plane rotations 消去最后一行的 entries, 并把相同 rotations 作用到 appended right-hand side:

$$G \begin{bmatrix} R & c \\ a^T & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{R} & \tilde{c} \\ 0 & \rho \end{bmatrix}, \quad G^T G = I. \quad (6)$$

原来的 R nonsingular, 所以 appended matrix 仍 full column rank, $\tilde{R}$ 也 nonsingular。由 norm preservation, (5) 化为

$$\eta^2 + \left\| \tilde{R}x - \tilde{c} \right\|_2^2 + \rho^2.$$

故新 solution 与 minimum residual norm 分别为

$$\boxed{\tilde{x} = \tilde{R}^{-1}\tilde{c}, \quad \eta_{\text{new}} = \sqrt{\eta^2 + \rho^2}.}$$

特别地, ρ 只是新 compressed problem 的 residual component; 不能把整个新 residual norm 误写成 $|\rho|$ 。

第 j 个 rotation 只更新两行中从第 j 列开始的 entries, 总 work 为

$$\sum_{j=1}^n O(n-j+1) = O(n^2).$$

随后 triangular solve 也是 $O(n^2)$; compressed state $(\tilde{R}, \tilde{c}, \eta_{\text{new}})$ 的总 storage 为 $O(n^2)$, 且 update 可原地完成。无需显式形成 enlarged orthogonal matrix。

评分要点 (20 分) old residual decomposition 4 分; compressed row update 6 分; new solution 与 residual identity 5 分; rank/edge cases 2 分; complexity 3 分。

Problem 4 [15 points]

求和所有 balance equations 得到必要条件

$$h \sum_{j=1}^N \bar{f}_j = F_{N+1/2} - F_{1/2} = g_1 - g_0. \quad (7)$$

这也是充分条件。事实上先由

$$F_{j+1/2} = g_0 + h \sum_{\ell=1}^j \bar{f}_\ell \quad (8)$$

递推全部 face fluxes; (7) 恰保证最后一个 flux 等于 g_1 。然后由

$$U_{j+1} = U_j - h F_{j+1/2} \quad (9)$$

递推 cell values。 U_1 任意时得到全部未归一化 solutions; 任意两解之差为 constant vector。最后减去 discrete mean, 使 $h \sum_j U_j = 0$, 便得到唯一 normalized solution。(8)–(9) 与 mean subtraction 都是单次 sweep, 因此 work 为 $O(N)$ 。

连续问题令 $F(x) = -u'(x)$, 则 $F' = f$, 所以其 compatibility condition 也是

$$\int_0^1 f(x) dx = g_1 - g_0.$$

由于 $\bar{f}_j$ 是 exact cell averages, (8) 进一步给出

$$F_{j+1/2} = F(jh)$$

在每个 face 上精确成立。因此

$$U_{j+1} - U_j = -hF(jh) = h u'(jh),$$

而 midpoint quadrature 给出

$$u(x_{j+1}) - u(x_j) = h u'(jh) + O(h^3)$$

uniformly。若 $e_j = U_j - u(x_j)$, 则

$$e_{j+1} - e_j = O(h^3),$$

沿至多 $N = 1/h$ 个 cells 累积后, 所有 e_j 的 oscillation 为 $O(h^2)$ 。又因 $\int_0^1 u = 0$,

$$h \sum_{j=1}^N u(x_j) = O(h^2)$$

由 composite midpoint rule 成立; 结合 $h \sum U_j = 0$, 可控制 error 的 additive constant。最终

$$\max_{1 \leq j \leq N} |U_j - u(x_j)| = O(h^2).$$

评分要点 (15 分) compatibility 的必要充分性 4 分; nullspace/normalization 2 分; linear-time solver 3 分; exact face flux 与 $O(h^2)$ convergence 6 分。

Problem 5 [15 points]

令

$$q_j^n = a_j U_j^n.$$

则原 update 等价于

$$q_j^{n+1} = (1 - \lambda a_j) q_j^n + \lambda a_j q_{j-1}^n. \quad (10)$$

因此当且仅当

$$0 \leq \lambda \max_j a_j \leq 1 \quad (11)$$

时, (10) 对每个 j 是 convex combination。于是 scheme preservation of positivity, 并且

$$\|U\|_{\infty, a} := \max_j |a_j U_j|$$

满足

$$\|U^{n+1}\|_{\infty, a} \leq \|U^n\|_{\infty, a}.$$

由于 $0 < a_{\min} \leq a_j \leq a_{\max}$, 该 weighted norm 与 ordinary maximum norm uniformly equivalent。

条件 (11) 对所有 nonnegative data 的 positivity 是 sharp 的。若某个 $\lambda a_j > 1$, 取 $q_j > 0$ 而 $q_{j-1} = 0$, 则下一步该 component 变负; 端点 $\lambda a_j = 1$ 则完全允许。

当 $\lambda > 0$ 时, steady grid state 必须且只须满足

$$q_j = q_{j-1} \quad \text{for all } j,$$

即

$$a_j U_j = C.$$

这正是 continuous steady family $a(x)u(x) = C$ 的 sampled form, 所以 scheme 对该 family well balanced. $\lambda = 0$ 时 update 为 identity, 所有 states 当然都不变。

此外 periodic summation 使 $h \sum_j U_j$ 精确保留。对 smooth exact solution, 把 scheme 除以 Δt , backward spatial difference 给

$$\frac{u(x_j, t + \Delta t) - u(x_j, t)}{\Delta t} + \frac{(au)(x_j, t) - (au)(x_{j-1}, t)}{h} = O(\Delta t + h).$$

因此在 fixed Courant scaling 下为 first-order consistent。

评分要点 (15 分) hidden weighted variable 与 update 3 分; sharp positivity/CFL 4 分; weighted contraction 与 norm equivalence 3 分; well-balanced states 3 分; consistency 2 分。

Problem 6 [20 points; optional]

第一式立即给

$$x(t) = e^{-t}.$$

第二式是 linear equation, 直接求得

$$y(t) = \frac{e^{-t}}{1 - \varepsilon} + \left(b - \frac{1}{1 - \varepsilon}\right) e^{-t/\varepsilon}. \quad (12)$$

由于

$$\frac{1}{1 - \varepsilon} = 1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{1 - \varepsilon},$$

取

$$y_{\text{app}}(t) = (1 + \varepsilon)e^{-t} + (b - 1 - \varepsilon)e^{-t/\varepsilon}. \quad (13)$$

它精确满足 $y_{\text{app}}(0) = b$, 并且

$$y(t) - y_{\text{app}}(t) = \frac{\varepsilon^2}{1 - \varepsilon} (e^{-t} - e^{-t/\varepsilon}).$$

所以

$$\sup_{t \geq 0} |y(t) - y_{\text{app}}(t)| \leq \frac{\varepsilon^2}{1 - \varepsilon} \leq 2\varepsilon^2.$$

(12) 中不与 e^{-t} 成比例的 fast component 的 amplitude 为

$$C_\varepsilon = b - \frac{1}{1 - \varepsilon}.$$

对 fixed $b \neq 1$, $C_\varepsilon = b - 1 + O(\varepsilon)$; 当 ε 足够小时 $|C_\varepsilon| > \varepsilon$ 。由题设对 t_ε 的定义,

$$t_\varepsilon = \varepsilon \log \frac{|C_\varepsilon|}{\varepsilon} = \varepsilon \log \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon \log |b - 1| + O(\varepsilon^2).$$

因此真正的 transient event scale 是 $\varepsilon \log(1/\varepsilon)$ ，而不仅是 $O(\varepsilon)$ 。

若 $b = 1$ ，则

$$C_\varepsilon = -\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} = O(\varepsilon);$$

order-one fast component 从一开始就不存在。若使用同一 threshold $|C_\varepsilon|e^{-t/\varepsilon} = \varepsilon$ ，对应时间只有

$$t_\varepsilon = \varepsilon \log \frac{1}{1-\varepsilon} = O(\varepsilon^2).$$

最后，取

$$b = \frac{1}{1-\varepsilon}$$

时 $C_\varepsilon = 0$ ，fast component 被精确消除。

评分要点 (20 分) exact mode separation 5 分；uniform approximation 与 error bound 6 分； $\varepsilon \log(1/\varepsilon)$ event scale 4 分； $b = 1$ degeneracy 3 分；exact prepared datum 2 分。

Problem 7 [20 points; optional]

记 barrier objective 为

$$\Phi_\mu(x) = c^T x - \mu \sum_{i=1}^n \log x_i.$$

feasible set 的 closure P bounded，且存在 strictly positive feasible point。 Φ_μ 在任何 component 趋于 0 时趋于 $+\infty$ ，所以其一个 sublevel set 是 affine feasible set 内远离 boundary 的 compact set， minimizer 存在。 Hessian

$$\nabla^2 \Phi_\mu(x) = \mu \operatorname{diag}(x_i^{-2})$$

positive definite，故 minimizer 唯一。

采用 Lagrangian

$$L(x, y) = c^T x - \mu \sum_i \log x_i + y^T (b - Ax).$$

stationarity 给出

$$c - \mu X^{-1} \mathbf{1} - A^T y = 0.$$

定义

$$s = c - A^T y = \mu X^{-1} \mathbf{1} > 0.$$

于是 (y, s) 对 dual problem

$$\max b^T y, \quad A^T y + s = c, \quad s \geq 0$$

feasible，并且

$$x_i(\mu) s_i(\mu) = \mu.$$

因此 exact primal-dual gap 为

$$c^T x(\mu) - b^T y = x(\mu)^T s = n\mu.$$

设 primal optimal value 为 p_* . 由 primal feasibility 与 weak duality,

$$\boxed{0 \leq c^T x(\mu) - p_* \leq n\mu.}$$

因为 P bounded, 任何 $\mu_k \downarrow 0$ 的序列都有 convergent subsequence $x(\mu_{k_\ell}) \rightarrow \bar{x} \in P$. 上式与 objective continuity 给出 $c^T \bar{x} = p_*$, 故每个 cluster point 都是 primal optimum. 若 primal optimum 不唯一, 这一论证不声称 whole path 收敛到某个预先指定的 optimizer.

评分要点 (20 分) existence/uniqueness 4 分; stationarity 与 dual certificate 6 分; complementarity/gap 5 分; objective bound 与 cluster points 4 分; 不夸大 nonunique case 1 分。