

Mock Qualifying Examination 09

参考解答与评分要点

Problems 1–5 共 80 分；Problems 6–7 二选一，计 20 分。

Problem 1 [10 points]

exact flow e^{tJ} 是 orthogonal matrix，所以 exact amplitude 不变。Euler step matrix 为 $M_h = I + hJ$ 。利用 $J^T = -J$ 与 $J^2 = -I$ ，

$$M_h^T M_h = (I - hJ)(I + hJ) = (1 + h^2)I.$$

因此每一步把 Euclidean norm 乘以 $\sqrt{1 + h^2}$ ，从而

$$\|y_n\|_2 = (1 + h^2)^{n/2} \|y_0\|_2.$$

把二维向量视为 complex number 后，一步相当于乘 $1 + ih$ 。若 $t_n = nh \rightarrow T < \infty$ ，则

$$n \log(1 + ih) = \frac{t_n}{h} \left(ih + \frac{h^2}{2} + O(h^3) \right) \rightarrow iT.$$

故 numerical solution 在 fixed time interval 上收敛到 $e^{TJ}y_0$ ；特别地 amplitude ratio 趋于 1。

更长时间上

$$\log \frac{\|y_n\|}{\|y_0\|} = \frac{n}{2} \log(1 + h^2) = \frac{nh^2}{2} + O(nh^4).$$

所以第一个 nonvanishing amplitude scale 是 $nh^2 = O(1)$ ，即 physical time $t_n = nh = O(h^{-1})$ 。若

$$t_n h = nh^2 \rightarrow \tau \in [0, \infty),$$

则

$$\frac{\|y_n\|}{\|y_0\|} \rightarrow e^{\tau/2}.$$

这说明 fixed-time convergence 与 long-time qualitative fidelity 是不同问题。

评分要点 (10 分) exact norm identity 3 分；fixed-time convergence 3 分；critical scale 2 分；limiting amplification 2 分。

Problem 2 [20 points]

由 partial fractions,

$$\frac{1}{\omega(x)} = \sum_{j=0}^n \frac{w_j}{x - x_j}.$$

两边在 x_j 的 residue 都是 $1/\omega'(x_j) = w_j$ ，且在 infinity 处衰减；故该 identity 成立。同理， p/ω 的 residue 是 $w_j f_j$ ，于是

$$\frac{p(x)}{\omega(x)} = \sum_{j=0}^n \frac{w_j f_j}{x - x_j}.$$

两式相除得到

$$p(x) = \frac{\sum_{j=0}^n \frac{w_j f_j}{x - x_j}}{\sum_{j=0}^n \frac{w_j}{x - x_j}}.$$

evaluation 只需 $O(n)$ operations。若 $x = x_r$ ，应直接返回 f_r ；也可在 quotient 中令 $x \rightarrow x_r$ ，分子分母的 singular terms 相消后得到同一极限。所有 weights 同乘一个非零常数不改变 quotient。

加入 $x_* \notin \{x_j\}$ 后，

$$\tilde{\omega}(x) = \omega(x)(x - x_*).$$

因此对旧节点

$$\tilde{w}_j = \frac{w_j}{x_j - x_*},$$

而新 weight 为

$$\tilde{w}_* = \frac{1}{\omega(x_*)} = \left(\prod_{j=0}^n (x_* - x_j) \right)^{-1}.$$

计算全部旧 weights 与 product 各需一次 traversal，所以总 cost 是 $O(n)$ 。

反之，删除 x_r 后 $\hat{\omega}(x) = \omega(x)/(x - x_r)$ 。对 $j \neq r$ ，

$$\omega'(x_j) = (x_j - x_r)\hat{\omega}'(x_j),$$

故

$$\hat{w}_j = (x_j - x_r)w_j, \quad j \neq r.$$

删除相应 datum 后同样只需 $O(n)$ operations。三组公式都来自 nodal polynomial 在 simple roots 处的 derivatives，因而没有遗漏 normalization factor。

评分要点 (20 分) 两项 partial-fraction identities 6 分；evaluation quotient 与 node case 4 分；adding-node weights/proof 5 分；deletion update/proof 3 分；complexity 2 分。

Problem 3 [20 points]

题设中 $n \geq 2$ ；若允许 $n = 1$ ，则 matrix 已为 diagonal，所有结论立即成立。令

$$S_k = \sum_{i \neq j} |a_{ij}^{(k)}|^2 = \left\| \text{off}(A^{(k)}) \right\|_F^2.$$

plane rotation 只在 (p, q) coordinate plane 中作用。对每个 $r \notin \{p, q\}$ ，两项 (a_{pr}, a_{qr}) 被正交旋转，平方和保持；selected 2×2 principal block 被对角化。由于 orthogonal similarity 保持整个 Frobenius norm，恰有

$$S_{k+1} = S_k - 2|a_{pq}^{(k)}|^2.$$

若 $S_k > 0$ ，最大元选择给出

$$|a_{pq}^{(k)}|^2 \geq \frac{S_k}{n(n-1)}.$$

所以

$$S_{k+1} \leq \left(1 - \frac{2}{n(n-1)}\right) S_k,$$

并由 induction

$$S_k \leq \left(1 - \frac{2}{n(n-1)}\right)^k S_0 \rightarrow 0.$$

每个 $A^{(k)}$ 都与 A orthogonally similar, 故 eigenvalue multiset 不变, 而 $\|A^{(k)}\|_F = \|A\|_F$ 使 diagonal vectors bounded. 任取一个 subsequence; 它有一个 subsubsequence, 其 diagonal vector 收敛到 d . 同时 off-diagonal part 趋零, 故对应 matrices 收敛到 $\text{diag}(d)$. Characteristic polynomial 对 matrix entries continuous, 而每一步的 characteristic polynomial 都等于 A 的, 故 $d_1, \dots, d_n$ 作为 multiset 恰是 A 的 eigenvalues. 于是 sorted diagonal vector 的每个 accumulation point 都是 sorted spectrum; bounded sequence 只有这一个 accumulation point, 故

$$\text{sort}(\text{diag } A^{(k)}) \rightarrow \text{sort}(\lambda(A)).$$

若某一步 $S_k = 0$, matrix 已 diagonal, algorithm 停止; 其 diagonal entries 已经是 A 的 eigenvalues, 上述结论仍成立。

评分要点 (20 分) rotation/Frobenius identity 6 分; max-pivot contraction 5 分; geometric convergence 2 分; subsequence/spectrum argument 5 分; finite termination 2 分。

Problem 4 [15 points]

记

$$\delta_h^2 v_j = \frac{v_{j-1} - 2v_j + v_{j+1}}{h^2}.$$

对 exact solution,

$$-\delta_h^2 u_j = f_j - \frac{h^2}{12} u^{(4)}(x_j) - \frac{h^4}{360} u^{(6)}(x_j) + o(h^4).$$

又因 $f = -u''$,

$$f_j + \frac{h^2}{12} \delta_h^2 f_j = f_j - \frac{h^2}{12} u^{(4)}(x_j) - \frac{h^4}{144} u^{(6)}(x_j) + o(h^4).$$

所以所求 method 是

$$-\delta_h^2 U_j = f_j + \frac{h^2}{12} \delta_h^2 f_j = \frac{f_{j-1} + 10f_j + f_{j+1}}{12}, \quad 1 \leq j \leq N-1,$$

配以 $U_0 = U_N = 0$. 它使用的 left-hand matrix 与 standard centered scheme 完全相同。代入 exact samples 后 residual 为

$$\tau_j = \frac{h^4}{240} u^{(6)}(x_j) + o(h^4),$$

其中 $o(h^4)$ 对 grid points uniform; 故 local order 是 four.

令 $A_h = -\delta_h^2$ with homogeneous Dirichlet data. 若 $A_h v \geq 0$, discrete minimum argument 给出 $v \geq 0$, 故 A_h^{-1} entrywise nonnegative. 又

$$w_j = \frac{1}{2} x_j (1 - x_j)$$

精确满足 $A_h w = \mathbf{1}$, 所以

$$\|A_h^{-1}\|_\infty = \|A_h^{-1}\mathbf{1}\|_\infty = \max_j w_j \leq \frac{1}{8}.$$

若 $e_j = u(x_j) - U_j$, 则 $A_h e = \tau$, 从而

$$\|e\|_\infty \leq \frac{1}{8} \|\tau\|_\infty \leq \frac{h^4}{1920} \|u^{(6)}\|_\infty + o(h^4).$$

因此 global maximum-norm convergence 也是 fourth order。

评分要点 (15 分) 发现/推导 RHS correction 4 分; Taylor coefficient 与 local order 4 分; inverse/barrier stability 4 分; global estimate 3 分。

Problem 5 [15 points]

记

$$\|V\|_h^2 = h \sum_{j=1}^{N-1} V_j^2, \quad |V|_{1,h}^2 = h \sum_{j=0}^{N-1} \left(\frac{V_{j+1} - V_j}{h} \right)^2, \quad V_0 = V_N = 0.$$

对 fixed U^n , 在普通有限维空间 $\mathbb{R}^{N-1}$ 上定义

$$\Phi_n(V) = \frac{1}{2k} \|V - U^n\|_h^2 + \frac{1}{2} |V|_{1,h}^2 + \frac{h}{4} \sum_{j=1}^{N-1} V_j^4.$$

该函数 coercive, 且对任意 nonzero W ,

$$D^2\Phi_n(V)[W, W] = \frac{1}{k} \|W\|_h^2 + |W|_{1,h}^2 + 3h \sum_{j=1}^{N-1} V_j^2 W_j^2 > 0.$$

所以 Φ_n 有唯一 minimizer。利用 discrete summation by parts, 它的 ordinary finite-dimensional first-order condition 正是

$$\frac{V - U^n}{k} - \delta_h^2 V + V^{\circ 3} = 0.$$

故 $V = U^{n+1}$ 是题给 nonlinear algebraic system 的唯一 solution; 对任意 $k, h > 0$ 都不需要 CFL restriction。这里 $V^{\circ 3}$ 表示 componentwise cube, 没有引入任何额外 PDE formulation。

定义 discrete energy

$$\mathcal{E}_h(V) = \frac{1}{2} |V|_{1,h}^2 + \frac{h}{4} \sum_{j=1}^{N-1} V_j^4.$$

令 $d = U^{n+1} - U^n$ 。将 scheme 与 d 作 discrete inner product, 并使用

$$(D_+ U^{n+1}, D_+ d)_h = \frac{1}{2} (|U^{n+1}|_{1,h}^2 - |U^n|_{1,h}^2 + |d|_{1,h}^2)$$

以及 scalar convexity inequality

$$a^3(a - b) \geq \frac{1}{4}(a^4 - b^4),$$

得到

$$\mathcal{E}_h(U^{n+1}) + \frac{1}{k} \|U^{n+1} - U^n\|_h^2 + \frac{1}{2} |U^{n+1} - U^n|_{1,h}^2 \leq \mathcal{E}_h(U^n).$$

因此 energy 对所有 positive time steps nonincreasing。较弱的 monotonicity $\mathcal{E}_h(U^{n+1}) \leq \mathcal{E}_h(U^n)$ 也可直接由 minimizer 与 competitor $V = U^n$ 得到。

最后把 smooth exact grid values 代入，并在 t_{n+1} 展开：

$$\frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{k} = u_t(t_{n+1}) - \frac{k}{2}u_{tt}(t_{n+1}) + O(k^2),$$

$$\delta_h^2 u = u_{xx} + \frac{h^2}{12}u_{xxx} + O(h^4).$$

由 $u_t - u_{xx} + u^3 = 0$ ，normalized local residual 为

$$\left[-\frac{k}{2}u_{tt} - \frac{h^2}{12}u_{xxx} + O(k^2 + h^4) \right]$$

所以该 method 是 first order in time、second order in space，即 local consistency order $O(k + h^2)$ 。

评分要点 (15 分) 发现 finite-dimensional functional 4 分；coercivity/strict convexity 与 existence/uniqueness 3 分；discrete energy decay 5 分；consistency 3 分。

Problem 6 [20 points; optional]

记

$$f_0 = f(0), \quad f_1 = f'(0), \quad r(x) = f(x) - f_0 - f_1 x.$$

分解

$$I(\varepsilon) = f_0 \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + \varepsilon^2} + f_1 \int_0^1 \frac{x dx}{x^2 + \varepsilon^2} + \int_0^1 \frac{r(x)}{x^2 + \varepsilon^2} dx.$$

前两项精确为

$$\frac{f_0}{\varepsilon} \arctan \frac{1}{\varepsilon}, \quad \frac{f_1}{2} \log \frac{1 + \varepsilon^2}{\varepsilon^2}.$$

因此

$$\begin{aligned} \frac{f_0}{\varepsilon} \arctan \frac{1}{\varepsilon} &= \frac{\pi f_0}{2\varepsilon} - f_0 + O(\varepsilon^2), \\ \frac{f_1}{2} \log \frac{1 + \varepsilon^2}{\varepsilon^2} &= f_1 \log \frac{1}{\varepsilon} + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

由于 $f \in C^2$ ， $|r(x)| \leq Cx^2$ ，且 $r(x)/x^2$ 连续延拓到 $x = 0$ 。此外

$$\left| \int_0^1 r(x) \left(\frac{1}{x^2 + \varepsilon^2} - \frac{1}{x^2} \right) dx \right| \leq C\varepsilon^2 \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + \varepsilon^2} = O(\varepsilon).$$

故完整 expansion 是

$$I(\varepsilon) = \frac{\pi f(0)}{2\varepsilon} + f'(0) \log \frac{1}{\varepsilon} - f(0) + \int_0^1 \frac{f(x) - f(0) - xf'(0)}{x^2} dx + O(\varepsilon).$$

若 $f(0) = 0$ 而 $f'(0) \neq 0$ ，dominant term 改为 logarithmic；若 $f(0) = f'(0) = 0$ ，则

$$I(\varepsilon) \longrightarrow \int_0^1 \frac{f(x)}{x^2} dx$$

且误差为 $O(\varepsilon)$ 。若相应 coefficients 也偶然为零，当然可发生进一步 cancellation，但题给 regularity 下不能无条件提高 remainder order。

评分要点 (20 分) 正确 subtraction 5 分; 两个 singular integrals/expansions 5 分; finite-part constant 4 分; remainder estimate 4 分; degenerate cases 2 分。

Problem 7 [20 points; optional]

feasible set 是 nonempty closed convex set, objective continuous、coercive 且 strictly convex, 所以 minimizer 存在且 unique。

对 constraints $x_i - x_{i+1} \leq 0$ 引入 multipliers $\lambda_i \geq 0$, 并置 $\lambda_0 = \lambda_n = 0$ 。KKT conditions 是

$$x_i - y_i + \lambda_i - \lambda_{i-1} = 0, \quad \lambda_i(x_i - x_{i+1}) = 0.$$

令

$$S_k = \sum_{i=1}^k (x_i - y_i).$$

对前 k 个 stationarity equations 求和得

$$S_k = -\lambda_k \leq 0, \quad S_n = 0,$$

且 $x_k < x_{k+1}$ 时 $\lambda_k = 0$, 所以 $S_k = 0$ 。

设 $B = \{r, \dots, s\}$ 是一个 maximal constant block, 值为 μ_B 。block 两端若不是 domain endpoint, monotonicity 都是 strict, 故相应 multipliers 为零。将 stationarity equations 在 block 上相加得到

$$(s - r + 1)\mu_B - \sum_{i=r}^s y_i = 0,$$

即

$$\mu_B = \frac{1}{|B|} \sum_{i \in B} y_i.$$

下面给出 linear-time construction。依次扫描 $y_1, \dots, y_n$, 把每个 datum 作为一个 singleton block 压入 stack, 并记录 block 的 count、sum 和 mean。只要 stack 顶端两个相邻 blocks 的 means 满足

$$\mu_{\text{left}} \geq \mu_{\text{right}},$$

就把它合并, 用 combined sum/count 更新 mean; 继续直到 stack means strictly increasing。最后把每个 block 的 mean 赋给 block 内全部 x_i 。

证明该输出 optimal。归纳可证, 每个最终 block $B = [r, s]$ 的任意 prefix $[r, k]$ 都满足

$$\frac{1}{k - r + 1} \sum_{i=r}^k y_i \geq \mu_B.$$

确实, 合并 means 为 $\mu_L \geq \mu_R$ 的 two blocks 时, 位于 left block 内的 prefix average 至少为 μ_L ; 跨入 right block 的 prefix 在尚未加入全部较低平均值数据时, 也不小于最终 weighted mean。于是, 在每个 block 内,

$$\sum_{i=r}^k (x_i - y_i) = (k - r + 1) \left(\mu_B - \frac{1}{k - r + 1} \sum_{i=r}^k y_i \right) \leq 0,$$

而 block endpoint 处该和为零。由于前面完整 blocks 的 residual sums 都为零, global $S_k \leq 0$, 且在 strict block boundaries 有 $S_k = 0$ 。令 $\lambda_k = -S_k$, 便得到全部 KKT conditions。因此该输出就是 unique minimizer。

每个 index 只被 push 一次; 每次 merge 使 block 数减一, 所以 merges 至多 $n - 1$ 次。stack operations 与最后展开总计 $O(n)$ time 和 $O(n)$ storage。

评分要点 (20 分) existence/uniqueness 2 分; KKT cumulative characterization 5 分; block-average structure 3 分; algorithm 4 分; optimality proof 4 分; complexity 2 分。