

Mock Qualifying Examination 08

参考解答与评分要点

Problems 1–5 共 80 分；Problems 6–7 二选一，计 20 分。

Problem 1 [10 points]

取 A 的一组 orthonormal eigenvectors v_i ，写

$$x_0 = \sum_{i=1}^n c_i v_i, \quad c_1 \neq 0, \quad \rho = \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right| < 1.$$

由于 dominant eigenvalue 为负，

$$x_k = (-1)^k \operatorname{sgn}(c_1) v_1 + O(\rho^k).$$

所以 vectors 本身因符号交替而不收敛，但其 spans 收敛。若 ϑ_k 是 x_k 与 $\operatorname{span}\{v_1\}$ 的 acute angle，则

$$\tan \vartheta_k = \frac{(\sum_{i=2}^n c_i^2 |\lambda_i|^{2k})^{1/2}}{|c_1| |\lambda_1|^k} \leq \frac{(\sum_{i=2}^n c_i^2)^{1/2}}{|c_1|} \rho^k.$$

等价地，令 $P_k = x_k x_k^T$ 及 $P_\star = v_1 v_1^T$ ，则

$$\|P_k - P_\star\|_2 = \sin \vartheta_k = O(\rho^k).$$

若 x_0 在某个满足 $|\lambda_i| = |\lambda_2|$ 的 eigenspace 上有非零分量，此阶也是 sharp；否则应把 ρ 换成初始向量实际含有的最大非 dominant eigenvalue ratio。

评分要点 (10 分) 识别符号交替 3 分；spectral expansion 3 分；angle/projector formula 2 分；rate 与 sharpness 2 分。

Problem 2 [20 points]

先固定 h 。由于 $\mathcal{F}_M$ 对任意二次多项式的常数、一次和二次系数都不加限制，若 worst-case error 有限，estimator 必须对 $1, x, x^2$ 精确。因此

$$a + b + c = 0, \quad h(c - a) = 1, \quad h^2(a + c) = 0.$$

这唯一强迫

$$a = -\frac{1}{2h}, \quad b = 0, \quad c = \frac{1}{2h}.$$

换言之，允许使用中点数据并不能改善 deterministic minimax estimator。

Taylor formula with integral remainder 给出

$$\left| \frac{f(h) - f(-h)}{2h} - f'(0) \right| \leq \frac{Mh^2}{6}.$$

三个数据误差的最坏贡献为

$$\delta(|a| + |b| + |c|) = \frac{\delta}{h}.$$

两项可以同时达到：取 $f(x) = Mx^3/6$ ，并令两端数据误差分别为 $-\delta$ 与 $+\delta$ （必要时整体换号）。所以固定 h 的 exact worst-case error 是

$$E(h) = \frac{Mh^2}{6} + \frac{\delta}{h}.$$

在 $(0, \infty)$ 上唯一 stationary point 满足

$$\frac{Mh}{3} - \frac{\delta}{h^2} = 0, \quad h_0 = \left(\frac{3\delta}{M}\right)^{1/3}.$$

因此在 $0 < h \leq 1$ 上，

$$h_{\star} = \begin{cases} (3\delta/M)^{1/3}, & 0 < \delta \leq M/3, \\ 1, & \delta \geq M/3, \end{cases}$$

且在等号处两式一致。最小 worst-case error 为

$$E_{\star} = \begin{cases} \frac{3^{2/3}}{2} M^{1/3} \delta^{2/3}, & 0 < \delta \leq M/3, \\ \frac{M}{6} + \delta, & \delta \geq M/3. \end{cases}$$

二次多项式的 unbounded coefficients 证明了其他 (a, b, c) 的 worst case 为 infinite; cubic 与 adversarial noise 又证明上述有限 bound 每一点均 sharp。

评分要点 (20 分) finite-error reproduction 条件 5 分；唯一 coefficients 3 分；truncation 与 noise bounds 4 分；simultaneous sharpness 3 分；优化及 active endpoint 5 分。

Problem 3 [20 points]

full column rank 与 consistency 保证 $Ax = b$ 有唯一 solution $x_{\star}$ 。记 $e_k = x_k - x_{\star}$ 。若本步选择 row i ，则 $b_i = a_i^T x_{\star}$ ，所以

$$e_{k+1} = e_k - \frac{a_i^T e_k}{\|a_i\|_2^2} a_i.$$

subtracted vector 是 e_k 在 a_i direction 上的 orthogonal component，故

$$\|e_{k+1}\|_2^2 = \|e_k\|_2^2 - \frac{(a_i^T e_k)^2}{\|a_i\|_2^2}.$$

在给定 e_k 的条件下取 expectation，sampling weights 恰好消去 row norms：

$$\mathbb{E}(\|e_{k+1}\|_2^2 \mid e_k) = \|e_k\|_2^2 - \frac{\|Ae_k\|_2^2}{\|A\|_F^2}.$$

令

$$\rho = 1 - \frac{\sigma_{\min}(A)^2}{\|A\|_F^2}.$$

由 full column rank, $\sigma_{\min}(A) > 0$ ；又 $\sigma_{\min}(A)^2 \leq \|A\|_F^2$ ，所以 $0 \leq \rho < 1$ 。singular-value lower bound 与 tower property 给出

$$\mathbb{E} \|x_k - x_{\star}\|_2^2 \leq \rho^k \|x_0 - x_{\star}\|_2^2.$$

若 $0 < \rho < 1$, 为保证右端不超过 $\varepsilon^2 \|x_0 - x_\star\|_2^2$, 充分取

$$k \geq \left\lceil \frac{2 \log(1/\varepsilon)}{-\log \rho} \right\rceil.$$

也可由 $1 - s \leq e^{-s}$ 得到稍宽松但常用的 condition

$$k \geq 2 \frac{\|A\|_F^2}{\sigma_{\min}(A)^2} \log \frac{1}{\varepsilon}.$$

若 $\rho = 0$, logarithmic formula 不使用; conditional identity 表明一次 update 后 expected squared error 已为零, 故 $x_1 = x_\star$ almost surely.

factor 是 sharp 的。取 $A = I_n$, 则每步 uniformly 选择一个 coordinate 并把该 coordinate error 精确置零。因此

$$\mathbb{E}(\|e_{k+1}\|_2^2 | e_k) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \|e_k\|_2^2,$$

而 $\sigma_{\min}(A)^2 / \|A\|_F^2 = 1/n$ 。故

$$\mathbb{E} \|e_k\|_2^2 = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \|e_0\|_2^2$$

在每一步都取到 bound; $n = 1$ 同时给出 $\rho = 0$ endpoint。

对 dense A , precompute row norms 与 sampling table 需 $O(mn)$ arithmetic。用 alias table 后抽样为 $O(1)$, 每一步 row inner product 和 vector update 为 $O(n)$, 故 k 步的 total dense cost 是

$$O(mn + kn).$$

对 sparse matrix, per-step cost 可换成所选 row 的 nonzero count。题设排除了 zero rows; 否则必须删除它们或赋 probability zero。

评分要点 (20 分) one-step orthogonal identity 5 分; conditional expectation 4 分; singular-value rate 与 iteration count 5 分; endpoint/sharpness 3 分; complexity 3 分。

Problem 4 [15 points]

smooth radial function 在原点的 radial profile 具有 even extension; 特别地 $\phi'(0) = \phi'''(0) = 0$ 。从任一 Cartesian direction 取极限可得

$$\Delta u(0) = d\phi''(0).$$

又由 even Taylor expansion,

$$\phi(h) - \phi(0) = \frac{h^2}{2} \phi''(0) + \frac{h^4}{24} \phi^{(4)}(0) + O(h^6).$$

因此 origin equation 应取为

$$-\frac{2d}{h^2}(U_1 - U_0) = f(0).$$

代入 exact solution 后左端等于

$$-d\phi''(0) - \frac{dh^2}{12} \phi^{(4)}(0) + O(h^4) = f(0) + O(h^2),$$

故 local consistency 是 second order。

若把 $r = 0$ 误当成普通一维 Neumann endpoint, 常见 mirror-point elimination 会给 $-2(U_1 - U_0)/h^2 = f(0)$ 。它逼近的是 $-\phi''(0)$, 而真正的 radial Laplacian limit 是 $-d\phi''(0)$ 。例如 $\phi(r) = r^2$ 时二者分别给 -2 与正确值 $-2d$; 当 $d > 1$ 时误差为 $O(1)$, 故不是 consistent。非原点节点仍可用 centered approximation

$$-\left[\frac{U_{j+1} - 2U_j + U_{j-1}}{h^2} + \frac{d-1}{r_j} \frac{U_{j+1} - U_{j-1}}{2h}\right] = f(r_j).$$

评分要点 (15 分) 正确 origin limit 4 分; center equation 4 分; even expansion 与二阶误差 4 分; 错误的一维处理及显式反例 3 分。

Problem 5 [15 points]

continuous right-going wave $e^{-ickt}e^{i\kappa(x-L)}$ 被 $\partial_t + c\partial_x$ 精确消去; left-going branch 则得到 $-2i\kappa c$ 的 multiplier。因此 exact boundary 没有 reflection。

对 first-order backward difference, 令 $\theta = \kappa h$ 。在 $j = N$ 代入题给 field, incident 与 reflected amplitudes 的 coefficients 分别是

$$a_+(\theta) = -i\theta + 1 - e^{-i\theta}, \quad a_-(\theta) = -i\theta + 1 - e^{i\theta}.$$

boundary equation 为 $a_+ + R_1 a_- = 0$, 故

$$R_1(\theta) = -\frac{-i\theta + 1 - e^{-i\theta}}{-i\theta + 1 - e^{i\theta}}.$$

Taylor expansion 给出

$$a_+ = \frac{\theta^2}{2} - \frac{i\theta^3}{6} + O(\theta^4), \quad a_- = -2i\theta + \frac{\theta^2}{2} + O(\theta^3),$$

从而

$$R_1(\theta) = -\frac{i\theta}{4} + O(\theta^2).$$

对 second-order backward difference, dimensionless spatial symbols 是

$$d_+(\theta) = \frac{3 - 4e^{-i\theta} + e^{-2i\theta}}{2}, \quad d_-(\theta) = \frac{3 - 4e^{i\theta} + e^{2i\theta}}{2}.$$

所以

$$R_2(\theta) = -\frac{-i\theta + d_+(\theta)}{-i\theta + d_-(\theta)}.$$

利用

$$d_+(\theta) = i\theta + \frac{i\theta^3}{3} + \frac{\theta^4}{4} + O(\theta^5), \quad d_-(\theta) = -i\theta - \frac{i\theta^3}{3} + \frac{\theta^4}{4} + O(\theta^5),$$

得到

$$R_2(\theta) = \frac{\theta^2}{6} + O(\theta^3).$$

因此 first- and second-order one-sided derivatives 分别产生一阶和二阶的 long-wave reflection amplitude。原因是 incident branch 的 boundary residual 分别为 $O(\theta^2)$ 和 $O(\theta^3)$, 而 reflected branch 的 leading multiplier 是 $O(\theta)$; 除法后恰少一阶。这说明 boundary consistency order 直接控制这里的 reflection order, 但没有诉诸任何全局 convergence theorem。

评分要点 (15 分) continuous outgoing interpretation 2 分; first-order exact coefficient 4 分; first-order expansion 3 分; second-order symbol/expansion 4 分; order interpretation 2 分。

Problem 6 [20 points; optional]

记 $\eta = \sqrt{\varepsilon}$ 。只要 $x_k < a$, 序列严格递增, 并且 $x_k \in [-a, a]$ 。由于此时 increment 至少为 ε , 故它至多经过 $2a/\varepsilon + 1$ 步便越过 a , 所以 $N_\varepsilon < \infty$ 。

引入

$$y_k = \frac{x_k}{\eta}, \quad \phi_k = \arctan y_k.$$

recurrence 变成 $y_{k+1} = y_k + \eta(1 + y_k^2)$ 。因 $x_k > -1$, tangent subtraction formula 给出 exact identity

$$\phi_{k+1} - \phi_k = \arctan \left(\frac{\eta}{1 + x_k} \right), \quad 0 \leq k < N_\varepsilon.$$

这里差值属于 $(0, \pi/2)$, 故没有 branch ambiguity。

固定 $0 < r < a$, 令 N_r^- 、 N_r^+ 分别是第一次到达 $-r$ 与 r 的 indices, 并令 $K_r = N_r^+ - N_r^-$ 。在这段 passage 中 $|x_k| \leq r$ (threshold overshoot 只影响端点的一步), 故每一步角增量夹在

$$\arctan \frac{\eta}{1+r} \quad \text{与} \quad \arctan \frac{\eta}{1-r}$$

之间。进入与离开该区间的 x 值分别为 fixed negative 和 fixed positive 量级, 所以

$$\phi_{N_r^-} \longrightarrow -\frac{\pi}{2}, \quad \phi_{N_r^+} \longrightarrow \frac{\pi}{2}.$$

因此

$$(1-r)\pi \leq \liminf_{\eta \downarrow 0} \eta K_r \leq \limsup_{\eta \downarrow 0} \eta K_r \leq (1+r)\pi.$$

还需控制两端 tails。负端从 $-a$ 到 $-r$ 的总角宽为 $O(\eta/r)$; 而每步角增量至少是 $\arctan(\eta/(1+a))$, 故该段的 $\eta \times (\text{步数})$ 为 $O(\eta/r)$ 。正端同理, 且越过 a 的最后一步只贡献 $O(\eta)$ 。所以对 fixed r , 两端对 ηN_ε 的贡献趋于零。先令 $\eta \downarrow 0$, 再令 $r \downarrow 0$, 得到

$$N_\varepsilon \sim \frac{\pi}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad \text{equivalently} \quad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sqrt{\varepsilon} N_\varepsilon = \pi.$$

评分要点 (20 分) monotonicity/finiteness 3 分; 正确 scaling 3 分; arctangent exact increment 6 分; central passage bounds 5 分; tail/overshoot control 3 分。

Problem 7 [20 points; optional]

记 $\mathbf{1} = (1, 1, 1)^T$ 。row player 的 security LP 是

$$\max_{p, v} v \quad \text{s.t.} \quad A^T p \geq v\mathbf{1}, \quad \mathbf{1}^T p = 1, \quad p \geq 0.$$

其 dual 正是 column player 的 security LP:

$$\min_{q, w} w \quad \text{s.t.} \quad Aq \leq w\mathbf{1}, \quad \mathbf{1}^T q = 1, \quad q \geq 0.$$

finite-dimensional LP strong duality 说明两者 optimal values 相等。

令

$$r = \frac{1}{6}(3, 1, 2)^T.$$

直接计算 $Ar = 0$ ；又因 $A^T = -A$ ，也有 $A^T r = 0$ 。若 row player 取 $p = r$ ，则对每个 q 都有 $r^T Aq = 0$ ，故保证 payoff 0。若 column player 取 $q = r$ ，则每个 p 都有 $p^T Ar = 0$ ，故把 payoff 压到 0。因此

$$v_{\text{game}} = 0, \quad (p_{\star}, q_{\star}) = (r, r)$$

至少是一组 equilibrium。

最后证明唯一性。若 p 是任何 optimal row strategy，则 $A^T p \geq 0$ componentwise。由于 r 的三个分量严格为正，且

$$r^T A^T p = (Ar)^T p = 0,$$

上述非负向量的每个 component 必为零。因此 $A^T p = 0$ 。直接解 kernel 得

$$\ker A = \text{span}\{(3, 1, 2)^T\}.$$

再用 $\mathbf{1}^T p = 1$ 得 $p = r$ 。同理，任意 optimal column strategy 满足 $Aq \leq 0$ ；由 $r^T Aq = 0$ 和 $r > 0$ 得 $Aq = 0$ ，所以 $q = r$ 。故两个玩家的 optimal mixed strategy 都 unique。

评分要点 (20 分) primal/dual LP 6 分；kernel strategy 与 value certificate 6 分；strictly positive weight argument 4 分；kernel/normalization uniqueness 4 分。