

Mock Qualifying Examination 07

参考解答与评分要点

Problems 1–5 共 80 分；Problems 6–7 二选一，计 20 分。

Problem 1 [10 points]

由 $0 < x_k < 1$,

$$x_{k+1} = x_k(1 - x_k^{p-1})$$

仍在 $(0, x_k)$ 中。因此 $x_k \downarrow L \geq 0$ 。在 recurrence 中取极限得 $L = L - L^p$, 故 $L = 0$ 。

令 $q = p - 1 > 0$ 及 $y_k = x_k^{-q}$ 。则

$$y_{k+1} - y_k = x_k^{-q} [(1 - x_k^q)^{-q} - 1] = \frac{(1 - t_k)^{-q} - 1}{t_k}, \quad t_k = x_k^q \rightarrow 0.$$

右端趋于 q 。由于 $y_k \rightarrow \infty$, Stolz–Cesàro theorem (或对 increments 求和) 给出

$$\frac{y_k}{k} \rightarrow q = p - 1.$$

所以 sharp equivalent 是

$$x_k \sim ((p-1)k)^{-1/(p-1)}.$$

此外

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} = 1 - x_k^{p-1} \rightarrow 1,$$

故收敛不是 q -linear, 而是 sublinear (algebraic)。

评分要点 (10 分) positivity/limit 3 分; 正确变换与 increment limit 4 分; sharp equivalent 2 分; rate classification 1 分。

Problem 2 [20 points]

写

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k P_k(x)$$

并定义 (这是由 orthogonal expansion 推出的对象)

$$K_{n,\xi}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{2k+1}{2} P_k(\xi) P_k(x).$$

由题给 orthogonality,

$$\langle p, K_{n,\xi} \rangle_{L^2} = p(\xi), \quad \|K_{n,\xi}\|_2^2 = K_{n,\xi}(\xi) = \sum_{k=0}^n \frac{2k+1}{2} P_k(\xi)^2 > 0.$$

若 $p(\xi) = 1$, Cauchy–Schwarz 给出

$$1 \leq \|p\|_2 \sqrt{K_{n,\xi}(\xi)}.$$

equality 当且仅当 p 与 $K_{n,\xi}$ 成比例；再用 point constraint 确定比例。因此 unique minimizer 与 minimum 为

$$p_{\star}(x) = \frac{K_{n,\xi}(x)}{K_{n,\xi}(\xi)}, \quad \min \|p\|_2 = K_{n,\xi}(\xi)^{-1/2}.$$

在 $\xi = 1$ 时, $P_k(1) = 1$ 且

$$K_{n,1}(1) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n (2k+1) = \frac{(n+1)^2}{2}.$$

故

$$p_{\star}(x) = \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{k=0}^n (2k+1) P_k(x), \quad \|p_{\star}\|_2 = \frac{\sqrt{2}}{n+1}.$$

对任意 $p \in \mathcal{P}_n$, 同一 representation 给出 sharp inequality

$$|p(1)| = |\langle p, K_{n,1} \rangle| \leq \frac{n+1}{\sqrt{2}} \|p\|_2.$$

所以

$$C_n = \frac{n+1}{\sqrt{2}},$$

且 $K_{n,1}$ 的任意非零 scalar multiple 达到 equality。

评分要点 (20 分) orthogonal expansion/evaluation representation 6 分; sharp lower bound 4 分; minimizer and uniqueness 4 分; endpoint constant/minimizer 4 分; sharp inequality 2 分。

Problem 3 [20 points]

记

$$q_d(z) = \sum_{j=0}^{n-1} d_j z^j, \quad v(\lambda) = (1, \lambda, \dots, \lambda^{n-1})^T.$$

若 nearby root 写成 $\lambda(\varepsilon) = \lambda + \varepsilon \dot{\lambda} + O(\varepsilon^2)$, 则展开 $p(\lambda(\varepsilon)) + \varepsilon q_d(\lambda(\varepsilon)) = 0$ 得

$$\dot{\lambda} = -\frac{q_d(\lambda)}{p'(\lambda)} = -\frac{v(\lambda)^T d}{p'(\lambda)}.$$

由于 λ, d 均为 real, Cauchy-Schwarz 的 equality direction 可取 $d = \pm v(\lambda) / \|v(\lambda)\|_2$ 。所以 sharp absolute coefficient condition number 为

$$\kappa_{\text{abs}}(\lambda) = \frac{\left(\sum_{j=0}^{n-1} |\lambda|^{2j} \right)^{1/2}}{|p'(\lambda)|}.$$

现在从 companion eigenproblem 得到同一结论。直接验证

$$Cv(\lambda) = \lambda v(\lambda).$$

取 left eigenvector w , 令最后一个 component 为 1, 并对 $0 \leq j \leq n-2$ 定义

$$w_j = \lambda^{n-1-j} + c_{n-1} \lambda^{n-2-j} + \dots + c_{j+1}, \quad w_{n-1} = 1.$$

由 $p(\lambda) = 0$ 可逐项验证 $w^T C = \lambda w^T$ ；收集 powers 又有

$$w^T v(\lambda) = p'(\lambda).$$

coefficient perturbation 对 companion matrix 的 perturbation 是 $\dot{C} = -e_n d^T$ 。对 $C(\varepsilon)v(\varepsilon) = \lambda(\varepsilon)v(\varepsilon)$ 微分并左乘 w^T ，得到

$$\dot{\lambda} = \frac{w^T \dot{C} v}{w^T v} = -\frac{d^T v(\lambda)}{p'(\lambda)},$$

与 polynomial calculation 完全相同。

multiple root 时 $p'(\lambda) = 0$ ，上述 first-order division 失效，而且通常没有 Lipschitz root branch。例如 $p(z) = z^2$ ，只把 constant coefficient 改为 $-\varepsilon$ 后，roots 为 $\pm\sqrt{\varepsilon}$ ；coefficient 改变量是 $O(\varepsilon)$ ，root displacement 却是 $O(\sqrt{\varepsilon})$ 。

评分要点 (20 分) root perturbation 5 分；sharp condition number 4 分；companion right/left structure 5 分；eigenvalue perturbation link 4 分；multiple-root example 2 分。

Problem 4 [15 points]

在 x_j 处作 Taylor expansion。记 $h_- = h_{j-1}$ 、 $h_+ = h_j$ ；若 $u \in C^5$ ，则

$$\mathcal{D}_2 u(x_j) = u''(x_j) + \frac{h_+ - h_-}{3} u'''(x_j) + \frac{h_+^2 - h_+ h_- + h_-^2}{12} u^{(4)}(x_j) + O(h^3),$$

其中 $h = \max_j h_j$ ，remainder 在 quasiuniform family 上 uniform。

quasiuniformity 只说明 $h_{\pm} = O(h)$ 且二者不退化；它允许 $h_+ - h_- = O(h)$ 。因此一般只能保证 first-order pointwise consistency。若局部 mesh 满足

$$|h_j - h_{j-1}| = O(h^2) \quad \text{uniformly in } j,$$

则 odd-derivative term 也为 $O(h^2)$ ，恢复 second order。

为说明 quasiuniformity 不足，取偶数 N ，令 $0 < \alpha < 1$ 固定，并令 N 个 interval lengths 为

$$h_j = \frac{1 + (-1)^j \alpha}{N}, \quad j = 0, \dots, N-1.$$

这些长度之和为 1，且 mesh ratio 为 $(1+\alpha)/(1-\alpha)$ ，故 family quasiuniform。对 cubic $u(x) = x^3$ ，上式没有 remainder，并且

$$(\mathcal{D}_2 u)_j - u''(x_j) = 2(h_j - h_{j-1}) = \frac{4(-1)^j \alpha}{N}.$$

这给出 genuine first-order local error。这里的结论仅关于 pointwise consistency；不能在没有 stability argument 时把它自动升级为某个 BVP 的 global error 结论。

评分要点 (15 分) Taylor expansion/constants 6 分；quasiuniform order 3 分；mesh-smoothness condition 2 分；explicit counterexample/sharpness 4 分。

Problem 5 [15 points]

若 $0 \leq r \leq 1/2$, 三个 coefficients 非负且和为 1, 所以 update 是 convex combination; 它保持 nonnegativity, 并满足

$$\|U^{n+1}\|_{\infty} \leq \|U^n\|_{\infty}.$$

反之, convolution operator 的 ℓ^{∞} norm 是

$$2|r| + |1 - 2r|.$$

该值不超过 1 当且仅当 $0 \leq r \leq 1/2$ 。同一结论也可由 isolated data 看出: $r < 0$ 使 neighboring coefficient 为负; $r > 1/2$ 使 center coefficient 为负。因此 sharp range (包括两个 endpoints) 是

$$0 \leq r \leq \frac{1}{2}.$$

$r = 0$ 是 identity update; $r = 1/2$ 时 center weight 为零, 仍保持 positivity, 但不能声称 strict positivity。

题设的 weighted absolute summability 保证以下换指标均合法。事实上有限 stencil 与

$$1 + j^2 \leq C(1 + (j \pm 1)^2)$$

给出

$$\sum_j (1 + j^2) |U_j^{n+1}| \leq C_r \sum_j (1 + j^2) |U_j^n|,$$

所以该性质传播到每个有限 n 。因为 $x_{j+1} = x_j + h$, $x_{j-1} = x_j - h$, 直接 shift summation indices 得到

$$M_0^{n+1} = M_0^n$$

以及

$$M_1^{n+1} = r(M_1^n + hM_0^n) + (1 - 2r)M_1^n + r(M_1^n - hM_0^n) = M_1^n.$$

故

$$M_1^{n+1} = M_1^n.$$

对 second moment,

$$\begin{aligned} M_2^{n+1} &= r(M_2^n + 2hM_1^n + h^2M_0^n) + (1 - 2r)M_2^n \\ &\quad + r(M_2^n - 2hM_1^n + h^2M_0^n), \end{aligned}$$

从而

$$M_2^{n+1} = M_2^n + 2rh^2M_0^n.$$

特别地, $M_0^n = M_0^0$, 所以

$$M_2^n = M_2^0 + 2nrh^2M_0^0.$$

若 additionally $0 \leq r \leq 1/2$, $r = k/h^2$, $U^0 \geq 0$, 且 $t_n = nk$, 则

$$M_2^n = M_2^0 + 2t_nM_0^0.$$

对 nonnegative nonzero data, 令

$$\mu_h = \frac{M_1}{M_0}, \quad \text{Var}_h^n = \frac{M_2^n}{M_0} - \mu_h^2.$$

discrete mass 与 center of mass 不变, 而

$$\boxed{\text{Var}_h^n = \text{Var}_h^0 + 2t_n},$$

与 continuous heat equation 的 variance growth 完全一致。若 $M_0^0 = 0$, nonnegative data 必为零, 结论退化为平凡情形。

评分要点 (15 分) sharp positivity/contraction interval 5 分; mass 与 first moment 3 分; second moment recurrence 4 分; time/variance interpretation 与 zero-mass endpoint 3 分。

Problem 6 [20 points]

上升段 $v > 0$, 故

$$v' = -1 - \varepsilon v^2.$$

从 $v = V$ 到 $v = 0$ 积分可得 ascent time

$$t_{\uparrow} = \int_0^V \frac{dv}{1 + \varepsilon v^2} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \arctan(\sqrt{\varepsilon}V) = V - \frac{\varepsilon V^3}{3} + O(\varepsilon^2).$$

又用 chain rule $v' = v \frac{dv}{dz}$, maximum height 为

$$\boxed{H = \int_0^V \frac{v dv}{1 + \varepsilon v^2} = \frac{1}{2\varepsilon} \log(1 + \varepsilon V^2) = \frac{V^2}{2} - \frac{\varepsilon V^4}{4} + O(\varepsilon^2)}.$$

越过 apex 后 $v < 0$ 。令 downward speed $w = -v \geq 0$, 则符号变化给出

$$w' = 1 - \varepsilon w^2, \quad z' = -w.$$

若 W 为 impact speed, 由下降距离等于 H 得

$$H = -\frac{1}{2\varepsilon} \log(1 - \varepsilon W^2).$$

与上升段的 exact H 对接, 得到

$$\boxed{W = \frac{V}{\sqrt{1 + \varepsilon V^2}} = V - \frac{\varepsilon V^3}{2} + O(\varepsilon^2)}.$$

descent time 为

$$t_{\downarrow} = \int_0^W \frac{dw}{1 - \varepsilon w^2} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \operatorname{artanh}(\sqrt{\varepsilon}W) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \operatorname{arsinh}(\sqrt{\varepsilon}V) = V - \frac{\varepsilon V^3}{6} + O(\varepsilon^2).$$

因此

$$\boxed{T = t_{\uparrow} + t_{\downarrow} = 2V - \frac{\varepsilon V^3}{2} + O(\varepsilon^2)}.$$

apex 处 $v = 0$, 两侧 acceleration 都趋于 -1 , 所以 z, v 连续且上述两段通过同一 height H 自然匹配; 不能把下降段仍写成 $v' = -1 - \varepsilon v^2$ 。expansions 对 fixed V 且 $\varepsilon V^2 \ll 1$ 有效; 这里没有声称对 $V = O(\varepsilon^{-1/2})$ uniform。

评分要点 (20 分) ascent sign/time 4 分; height 4 分; descent sign and matching 4 分; impact speed 3 分; total time 3 分; validity 2 分。

Problem 7 [20 points]

对固定 x 令 $r = Ax - b$ 。triangle inequality 与 Frobenius bound 给出

$$\|r + \Delta x\|_2 \leq \|r\|_2 + \|\Delta\|_F \|x\|_2 \leq \|r\|_2 + \rho \|x\|_2.$$

若 $r \neq 0$ 且 $x \neq 0$, 取

$$\Delta_\star = \rho \frac{r}{\|r\|_2} \frac{x^T}{\|x\|_2};$$

则 $\|\Delta_\star\|_F = \rho$, 且 $\Delta_\star x = \rho \|x\|_2 r / \|r\|_2$, 所以达到上界。若 $r = 0$ 、 $x \neq 0$, 把 $r / \|r\|$ 换成任意 unit vector; 若 $x = 0$, 则 $\Delta x = 0$ 。因此所有 zero cases 下均有 exact identity

$$\max_{\|\Delta\|_F \leq \rho} \|(A + \Delta)x - b\|_2 = \|Ax - b\|_2 + \rho \|x\|_2.$$

原问题等价于 deterministic convex problem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} (\|Ax - b\|_2 + \rho \|x\|_2).$$

目标 continuous, 且至少为 $\rho \|x\|_2$, 故 coercive; 因此 minimizer 存在。目标未必 strictly convex, 所以不能无条件声称 uniqueness。

设 $b \neq 0$ 。在 $x = 0$, 第一项 differentiable, 其 gradient 为

$$-\frac{A^T b}{\|b\|_2},$$

而 $\partial \|x\|_2|_{x=0}$ 是 closed unit ball。convex optimality condition $0 \in \partial \phi(0)$ 等价于存在 z 、 $\|z\|_2 \leq 1$, 使

$$-\frac{A^T b}{\|b\|_2} + \rho z = 0.$$

故

$$x = 0 \text{ is optimal} \iff \|A^T b\|_2 \leq \rho \|b\|_2.$$

若 $b = 0$, $x = 0$ 的 objective 为零, 当然 optimal; 题设将 ratio case 单独排除正是为避免零分母。

评分要点 (20 分) upper bound 3 分; attaining perturbation/zero cases 6 分; deterministic convex equivalence 3 分; existence/nonuniqueness caution 3 分; zero-solution iff 5 分。