

Mock Qualifying Examination 06

参考解答与评分要点

Problems 1–5 共 80 分；Problems 6–7 二选一，计 20 分。

Problem 1 [10 points]

记 $e_k = x_k - \alpha$ 。exact Newton step 满足标准 local expansion

$$x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - \alpha = O(e_k^2).$$

本题的 step 比 exact Newton step 多出 $r_k/f'(x_k)$ ，所以

$$e_{k+1} = O(e_k^2) + \frac{r_k}{f'(x_k)}.$$

又因 $f(x_k)/(f'(x_k)e_k) \rightarrow 1$ ，对任意固定 $\delta > 0$ ，只要 x_k 充分接近 α ，便有

$$|e_{k+1}| \leq C|e_k|^2 + (1 + \delta)\eta_k|e_k|.$$

这就是所需的 rate estimate。

若 $\eta_k \leq \bar{\eta} < 1$ ，先取 δ 使 $(1 + \delta)\bar{\eta} < 1$ ，再缩小邻域吸收 quadratic term，即得 local q-linear convergence。更精确地，

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \eta_k.$$

因此 $\eta_k \rightarrow 0$ 时为 q-superlinear；若 $\eta_k = O(|f(x_k)|) = O(|e_k|)$ ，则右端两项均为 $O(e_k^2)$ ，故为 quadratic convergence。

端点不能保留：取 $f(x) = x$ 、 $\alpha = 0$ ，并令 $r_k = f(x_k)$ 。此时 $\eta_k = 1$ ，但方程给出 $s_k = 0$ ，迭代在任何非零 x_0 处停滞。

评分要点（10 分） local error estimate 4 分；三种 rate classification 4 分；endpoint 反例 2 分。

Problem 2 [20 points]

对固定 nodes 记

$$\omega(x) = \prod_{j=0}^N (x - x_j).$$

interpolation remainder 给出

$$|f(x) - I_N f(x)| \leq \frac{\|f^{(N+1)}\|_\infty}{(N+1)!} |\omega(x)|.$$

这个上界对函数类是 exact 的：取 $f = \omega/(N+1)!$ ，则 $I_N f = 0$ 且 $f^{(N+1)} \equiv 1$ 。故

$$\mathcal{E}(x_0, \dots, x_N) = \frac{\|\omega\|_\infty}{(N+1)!}.$$

问题于是变为在 $[-1, 1]$ 上寻找 uniform norm 最小的 monic degree- $(N+1)$ polynomial; 这里的 bridge 是由上式推出的, 而不是题面假定的。

定义 $T_{N+1}(\cos \theta) = \cos((N+1)\theta)$ 。它的 leading coefficient 为 2^N , 所以

$$t(x) = 2^{-N} T_{N+1}(x)$$

是 monic, 且 $\|t\|_\infty = 2^{-N}$ 。其 zeros 为

$$x_j = \cos \frac{(2j+1)\pi}{2(N+1)}, \quad j = 0, \dots, N,$$

次序任意。

还需证明没有更好的 monic polynomial。令 $\xi_j = \cos(j\pi/(N+1))$, $j = 0, \dots, N+1$; 按区间顺序重排后, $t(\xi_j)$ 在 $\pm 2^{-N}$ 间 alternating。若另一个 monic p 满足 $\|p\|_\infty < 2^{-N}$, 则 $p-t$ 的 degree 至多为 N , 但在相邻 extrema 之间交替变号, 因而至少有 $N+1$ 个不同 zeros, 矛盾。

equality case 也不能遗漏。设 $q = p-t$ 且 $\|p\|_\infty \leq 2^{-N}$; 则在按区间次序排列的 $N+2$ 个 extrema 上, q 具有 alternating weak signs。每一对相邻 extrema 之间都强制一个 zero。若相邻两个 intervals 只共享 extremum ξ_j 这一个 zero, 则两侧的允许符号相同, 故 q 在 ξ_j 不能以 odd multiplicity 穿过零; 该 zero 至少为 double。若不是这种情形, 两侧 intervals 各自含有不同的 zero。因此把 multiplicity 计入后, 非零 q 至少有 $N+1$ 个 zeros。但 $\deg q \leq N$, 矛盾。故 $q \equiv 0$, 即 equality 只能在 $p=t$ 时发生, t 是唯一 monic minimizer。

综上, 最优 nodes 是 T_{N+1} 的 zeros, 并且

$$\min_{x_0, \dots, x_N} \mathcal{E}(x_0, \dots, x_N) = \frac{2^{-N}}{(N+1)!}.$$

评分要点 (20 分) fixed-node worst case 6 分; reduction to a monic extremal problem 3 分; construction and normalization 4 分; alternation lower bound/uniqueness 5 分; nodes and constant 2 分。

Problem 3 [20 points]

令

$$S = BH^{-1}B^T.$$

对任意 $0 \neq y \in \mathbb{R}^m$, full row rank 给出 $B^T y \neq 0$, 故

$$y^T S y = (B^T y)^T H^{-1} (B^T y) > 0.$$

所以 S symmetric positive definite。

考虑 invertible block change of variables

$$R = \begin{pmatrix} I & -H^{-1}B^T \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

直接相乘得到 congruence

$$R^T K R = \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & -S \end{pmatrix}.$$

invertible congruence 保持 quadratic form 的 positive、negative、zero directions (Sylvester law of inertia), 所以

$$\text{inertia}(K) = (n, m, 0).$$

特别地, K 没有 zero eigenvalue, 因而 nonsingular。

对于 right-hand side, 第一 block row 给出

$$x = H^{-1}(f - B^T \lambda).$$

代入第二行, 得到 positive-definite system

$$S\lambda = BH^{-1}f - g, \quad x = H^{-1}(f - B^T \lambda).$$

因此可先对 H 作 Cholesky factorization, 用它求 $H^{-1}f$ 以及 $H^{-1}B^T$, 组装 S ; 再对 S 作 Cholesky factorization, 求 λ 并 back-substitute 得到 x 。整个过程从不求 indefinite K 的 factorization。

在 dense arithmetic 下, 主要成本为 H 与 S 的 Cholesky、 m 个 H -solve 以及形成 S , 即 $O(n^3 + n^2m + nm^2 + m^3) = O(n^3)$ (因 $m \leq n$); storage 为 $O(n^2 + m^2)$, 另加存储 B 。

评分要点 (20 分) $S \succ 0$ 4 分; congruence 与 inertia 6 分; nonsingularity 2 分; block solve 5 分; implementation/complexity 3 分。

Problem 4 [15 points]

记一步更新算子为

$$(PV)_j = (1 - \theta)V_{j-q} + \theta V_{j-q-1}.$$

因为它是两个 periodic shifts 的 convex combination,

$$\|PV\|_\infty \leq \|V\|_\infty.$$

triangle inequality 及 periodic reindexing 还给出

$$h \sum_j |(PV)_j| \leq (1 - \theta)h \sum_j |V_{j-q}| + \theta h \sum_j |V_{j-q-1}| = \|V\|_{1,h},$$

故 discrete ℓ^1 也 contractive。去掉 absolute values 后同样 reindex, 得到

$$h \sum_j (PV)_j = h \sum_j V_j.$$

这些结论与 integer part q 的大小无关, 因此没有 CFL restriction。

exact characteristic foot 为

$$x_j - a\tau = x_{j-q} - \theta h,$$

恰位于 x_{j-q-1} 与 x_{j-q} 之间。linear interpolation remainder 给出 one-step defect

$$|d_j^n| \leq \frac{\theta(1 - \theta)}{2} h^2 \|u_{xx}(\cdot, t_n)\|_\infty.$$

令 e^n 为 numerical/exact grid error。由 ℓ^∞ contractivity,

$$\|e^n\|_\infty \leq \|e^0\|_\infty + n \frac{\theta(1-\theta)}{2} h^2 \sup_{0 \leq t \leq T} \|u_{xx}(\cdot, t)\|_\infty.$$

若 $t_n = n\tau \leq T$ 且 initial samples exact, 则

$$\|e^n\|_\infty \leq \frac{T\theta(1-\theta)h^2}{2\tau} \|u_0''\|_\infty.$$

这里 advection 只平移 u_0 , 所以其二阶导数范数不随时间变化。进一步, 由 $\theta(1-\theta) \leq \theta \leq a\tau/h$, 还有 uniform bound

$$\|e^n\|_\infty \leq \frac{Ta}{2} h \|u_0''\|_\infty.$$

第一个 bound 显示误差是 repeated interpolation 的累积, 而不是 time discretization error。若 $\theta = 0$, 更新只是 exact integer grid shift, one-step defect 为零; 对 exact initial samples, 所有 time levels 上的 nodal error 都为零。

评分要点 (15 分) ℓ^1/ℓ^∞ contraction 4 分; mass 2 分; characteristic-foot interpolation error 3 分; global accumulation and uniform bound 4 分; integer-shift case 2 分。

Problem 5 [15 points]

代入 right-going Fourier branch

$$U_j(t) = e^{i(\kappa j h - \omega t)}, \quad 0 \leq \kappa \leq \frac{\pi}{h},$$

得到

$$-\omega^2 = -\frac{4c^2}{h^2} \sin^2 \frac{\kappa h}{2}.$$

在给定区间上取 nonnegative signed branch,

$$\omega_h(\kappa) = \frac{2c}{h} \sin \frac{\kappa h}{2}.$$

(若扩展到 negative wave numbers, 应相应选取 signed branch, 而不是在零点对 $|\sin|$ 求导。) 因此

$$c_{\text{ph}}(\kappa) = \frac{\omega_h}{\kappa} = c \frac{\sin(\kappa h/2)}{\kappa h/2}, \quad c_g(\kappa) = \frac{d\omega_h}{d\kappa} = c \cos \frac{\kappa h}{2}.$$

在 $\kappa = 0$ 取极限, 两者均为 c 。在 Nyquist endpoint $\kappa = \pi/h$, phase velocity 为 $2c/\pi$, 但 group velocity 为零。若 $\kappa h = \pi - \delta$ 且 $0 < \delta \ll 1$, 则

$$c_g = c \sin(\delta/2) = \frac{c\delta}{2} + O(\delta^3).$$

所以 near-Nyquist carrier 本身仍以 frequency 约 $2c/h$ 快速振荡, 但其 wave packet envelope 几乎不移动; 不能把 “zero group velocity” 误写成 grid values 不随时间变化。

另一方面, 对 fixed smooth function,

$$D_+ D_- u = u_{xx} + \frac{h^2}{12} u_{xxxx} + O(h^4),$$

所以空间离散是 second order。等价地，对 fixed κ ,

$$\omega_h = c\kappa \left(1 - \frac{\kappa^2 h^2}{24} + O(\kappa^4 h^4) \right).$$

这与 Nyquist behavior 不矛盾: consistency 固定的是 smooth physical mode, 而 Nyquist sequence 的 $\kappa = O(h^{-1})$, 其 derivatives 并不 uniformly bounded。

评分要点 (15 分) dispersion relation/branch 4 分; phase and group velocities 4 分; Nyquist interpretation 4 分; consistency reconciliation 3 分。

Problem 6 [20 points]

令 $v = y'$, 则

$$\varepsilon v' + xv = 0, \quad v(x) = C e^{-x^2/(2\varepsilon)}.$$

由对称 boundary data 得到 exact solution

$$y_\varepsilon(x) = \frac{\int_0^x e^{-s^2/(2\varepsilon)} ds}{\int_0^1 e^{-s^2/(2\varepsilon)} ds}.$$

对固定 $x > 0$, 它趋于 1; 对固定 $x < 0$, 趋于 -1 。reduced equation $xy' = 0$ 允许 turning point 两侧选取不同 constants, transition 位于 $x = 0$ 。

令 $X = x/\sqrt{\varepsilon}$ 。由于

$$\int_0^\infty e^{-s^2/(2\varepsilon)} ds = \sqrt{\frac{\pi\varepsilon}{2}},$$

uniform leading profile 为

$$Y(X) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^X e^{-S^2/2} dS, \quad y_\varepsilon(x) = Y(x/\sqrt{\varepsilon}) + O\left(\sqrt{\varepsilon} e^{-1/(2\varepsilon)}\right).$$

该误差 uniform on $[-1, 1]$: 把 denominator 的上限 1 延伸到 ∞ , 使用

$$\int_1^\infty e^{-s^2/(2\varepsilon)} ds \leq \varepsilon e^{-1/(2\varepsilon)},$$

再除以 $\sqrt{\pi\varepsilon/2}$ 即得上述 bound。

普通 expansion $y = y_0 + \varepsilon y_1 + \dots$ 的 leading equation 为 $xy'_0 = 0$, 只能在 $x < 0$ 与 $x > 0$ 分别给 constants, 无法在单一 smooth outer series 中连接两端 boundary data; 它还看不到 $x = O(\sqrt{\varepsilon})$ 的 distinguished balance。

评分要点 (20 分) exact reduction 4 分; outer limits/turning point 4 分; $\sqrt{\varepsilon}$ scale 4 分; profile 4 分; uniform bound 2 分; regular expansion failure 2 分。

Problem 7 [20 points]

先证 permutation matrix 是 extreme point。若 $P = (X^+ + X^-)/2$ 且 $X^\pm \in \mathcal{B}_n$, 则 $P_{ij} = 0$ 的位置由 nonnegativity 迫使 $X_{ij}^+ = X_{ij}^- = 0$ 。每行每列剩下的唯一位置再由 row/column sums 迫使其值为 1, 故 $X^+ = X^- = P$ 。

反过来, 设 $X \in \mathcal{B}_n$ 不是 permutation matrix。把 positive entries 看作一个 bipartite graph 的 edges, 左侧 vertices 是 rows, 右侧是 columns。若某 vertex 只有一条 positive edge, 则对应 row 或 column 的和为 1, 该 edge 权重必须为 1; 另一端不能再有 positive edge。这只是一个可删去的 isolated permutation pair。反复删去这类 pairs 后, 非 permutation 的假设保证还剩一个非空 finite graph, 且其中每个 vertex 的 degree 至少为 2, 所以它含有一个 cycle。bipartite graph 中该 cycle 长度为偶数。

沿 cycle 的 edges 交替标记 +1, -1, 其余位置记为 0, 得到 matrix D 。每一受影响 row/column 中恰有一正一负, 故 $D\mathbf{1} = D^T\mathbf{1} = 0$ 。取 $\varepsilon > 0$ 小于 cycle 上所有 positive entries, 便有

$$X^\pm = X \pm \varepsilon D \in \mathcal{B}_n, \quad X = \frac{X^+ + X^-}{2}, \quad X^+ \neq X^-.$$

所以 X 不是 extreme。由此

$$\text{ext}(\mathcal{B}_n) = \{\text{permutation matrices}\}.$$

$\mathcal{B}_n$ 是 nonempty compact polytope, linear functional 至少在一个 extreme point 取到 maximum。因此 fractional problem 等价于 finite assignment problem

$$\max_{\pi \in S_n} \sum_{i=1}^n C_{i, \pi(i)}.$$

特别地, 至少存在一个 permutation-matrix optimizer。若存在 ties, 不能断言所有 optimizers 都是 permutation matrices: optimal permutations 的 convex combinations 也 optimal。这不影响“存在一个”的结论。 $n = 1$ 的情形直接成立。

评分要点 (20 分) permutation matrices are extreme 4 分; support reduction and cycle 6 分; alternating perturbation 5 分; linear optimization consequence 3 分; ties/edge cases 2 分。