

Mock Qualifying Examination 05

参考解答与评分要点

Problems 1–5 共 80 分；Problems 6–7 二选一，计 20 分。

Problem 1 [10 points]

记 $e_k = x_k - \alpha$ ，并写

$$f(\alpha + e) = ae + ce^2 + O(e^3), \quad a = f'(\alpha), \quad c = \frac{1}{2}f''(\alpha).$$

secant formula 给出

$$e_{k+1} = \frac{f(\alpha + e_k)e_{k-1} - f(\alpha + e_{k-1})e_k}{f(\alpha + e_k) - f(\alpha + e_{k-1})}.$$

分子、分母约去 $e_k - e_{k-1}$ 后得到

$$e_{k+1} = \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}e_ke_{k-1} + o(|e_ke_{k-1}|).$$

若 local order 为 $p > 1$ ，则误差指数必须满足 $p = 1 + 1/p$ ，所以

$$p = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

更具体地，在通常的非退化轨道上，若 $|e_{k+1}|/|e_k|^p \rightarrow L$ ，则

$$L^p = \left| \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} \right|, \quad L = \left| \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} \right|^{1/p}.$$

题中的 $f''(\alpha) \neq 0$ 排除了 leading recurrence 退化；局部 well-definedness 和 convergence 已在题面中作为假设给出。

评分要点（10 分） error identity 与展开 5 分；阶数方程 3 分；order 与非退化说明 2 分。

Problem 2 [20 points]

设 Fourier coefficients 为 $\hat{f}_j$ 。交换有限和次序，得到 convolution representation

$$\sigma_N f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t) f(x-t) dt,$$

其中

$$K_N(t) = \sum_{|j| \leq N} \left(1 - \frac{|j|}{N+1}\right) e^{ijt} = \frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin((N+1)t/2)}{\sin(t/2)} \right)^2.$$

因此

$$K_N(t) \geq 0, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t) dt = 1.$$

立刻得到 positivity preservation 以及

$$\|\sigma_N f\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty}.$$

由 normalization,

$$\sigma_N f(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t)[f(x-t) - f(x)] dt.$$

给定 $\eta > 0$, uniform continuity 允许选择 $\delta > 0$, 使 $|t| < \delta$ 时括号的绝对值小于 η 。在远区 $\delta \leq |t| \leq \pi$,

$$K_N(t) \leq \frac{1}{(N+1)\sin^2(\delta/2)},$$

所以远区积分趋于零。近区由 normalization 控制为 η 。这证明 uniform convergence。

若 f 的 Lipschitz constant 为 L , 则

$$\|\sigma_N f - f\|_{\infty} \leq \frac{L}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| K_N(t) dt.$$

在 $|t| \leq \pi$ 上,

$$K_N(t) \leq \min \left\{ N+1, \frac{C}{(N+1)t^2} \right\}.$$

把积分在 $|t| = (N+1)^{-1}$ 处分开, 得到

$$\|\sigma_N f - f\|_{\infty} \leq CL \frac{1 + \log(N+1)}{N+1}.$$

这里 C 为与 f, N 无关的 absolute constant。

评分要点 (20 分) 导出 kernel 5 分; positivity 与 normalization 4 分; uniform convergence 5 分; Lipschitz rate 6 分。

Problem 3 [20 points]

令 T_k 为 T 的前 k 阶 leading principal submatrix。按最后一行展开 determinant 可知

$$p_k(\mu) = \det(T_k - \mu I).$$

对 $T - \mu I$ 作无 pivoting 的 LDL^T factorization。题设保证每个 leading minor 非零, 因而 factorization 存在。其 pivots 满足

$$d_1 = p_1, \quad d_k = \alpha_k - \mu - \frac{\beta_{k-1}^2}{d_{k-1}} = \frac{p_k}{p_{k-1}}.$$

由于 congruence 保持 inertia, $T - \mu I$ 的负 eigenvalue 数等于 negative pivots d_k 的个数。而

$$d_k < 0 \iff p_{k-1}p_k < 0.$$

所以

$$\#\{\lambda_j(T) < \mu\} = \text{sign changes in } p_0, p_1, \dots, p_n.$$

一次 count 只需顺次执行 recurrence, 成本 $O(n)$ 。若要找按升序排列的第 r 个 eigenvalue, 先取 bracket 满足 $\text{count}(L) < r \leq \text{count}(U)$, 再在其 midpoint μ 计算 count: count 小于 r 则提高 lower endpoint, 否则降低 upper endpoint。经过

$$k = \left\lceil \log_2 \frac{U-L}{\delta} \right\rceil$$

步, bracket 长度不超过 δ , 总成本为

$$O\left(n \log \frac{U-L}{\delta}\right).$$

若实际计算遇到某个 intermediate zero, 可对 μ 作 one-sided perturbation 或使用带符号的 safeguarded pivot; 题面已排除此情形。

评分要点 (20 分) determinant recurrence 3 分; LDL^T pivots 5 分; inertia/sign changes 5 分; bisection logic 4 分; complexity/zero case 3 分。

Problem 4 [15 points]

标准离散范数为

$$\|V\|_h^2 = h \sum_{j=1}^N V_j^2.$$

关键在于 endpoint 不能使用与 interior 相同的 quadrature weight。定义

$$\|V\|_{h,*}^2 = h \sum_{j=1}^{N-1} V_j^2 + \frac{h}{2} V_N^2.$$

它与标准范数 uniformly equivalent:

$$\frac{1}{2} \|V\|_h^2 \leq \|V\|_{h,*}^2 \leq \|V\|_h^2.$$

由 interior equations,

$$2h \sum_{j=1}^{N-1} U_j \dot{U}_j = -a \sum_{j=1}^{N-1} U_j (U_{j+1} - U_{j-1}) = -a U_{N-1} U_N,$$

其中使用了 $U_0 = 0$ 与 telescoping。outflow equation 给出

$$h U_N \dot{U}_N = -a U_N^2 + a U_N U_{N-1}.$$

两式相加后 cross term 正好消失, 故

$$\frac{d}{dt} \|U(t)\|_{h,*}^2 = -a U_N(t)^2 \leq 0.$$

因此

$$\|U(t)\|_h \leq \sqrt{2} \|U(0)\|_h,$$

且 stability constant 与 h 无关。若误把 endpoint 也赋 full weight, 上述 cross term 不会消失, 这正是 numerical boundary closure 的关键。

对 sufficiently smooth exact solution, interior centered difference 满足

$$\frac{u(x_j + h) - u(x_j - h)}{2h} = u_x(x_j) + \frac{h^2}{6} u_{xxx}(x_j) + O(h^4),$$

故 interior local residual 是 $O(h^2)$ 。在 $x_N = 1$,

$$\frac{u(1) - u(1-h)}{h} = u_x(1) - \frac{h}{2}u_{xx}(1) + \frac{h^2}{6}u_{xxx}(1) + O(h^3),$$

所以 outflow local residual 一般只有 $O(h)$ 。因此 pointwise local consistency 是 interior second order、outflow first order; 本题的 stability identity 本身不应被误述为 uniform second-order truncation error。

最后, $a > 0$ 时 characteristics 从左向右传播, continuous problem 只在 $x = 0$ 需要 inflow data。最后一个离散 ODE 是在 $x = 1$ 用 one-sided difference 逼近同一个 PDE, 并不是另加 continuum outflow boundary data。

评分要点 (15 分) 发现 endpoint half-weight 4 分; telescoping energy identity 4 分; uniform norm equivalence/stability 2 分; interior/outflow consistency orders 3 分; boundary interpretation 2 分。

Problem 5 [15 points]

设 physical flux 为 $J = -au_x$ 。由于每个 half-cell 上 profile linear 且 flux 相同,

$$U_{j+1} - U_j = -J \left(\frac{h}{2a_-} + \frac{h}{2a_+} \right).$$

因此唯一可能的 exact face coefficient 是

$$\hat{a} = \frac{2a_-a_+}{a_- + a_+}.$$

反向代入表明它对所有这类 profiles 确实 exact。

在整张 Dirichlet grid 上, 把每个 positive face coefficient 记为 $a_{j+1/2}$ 。相应 conservative operator 的 quadratic form 为

$$hU^T A_h U = \sum_{j+1/2} a_{j+1/2} \frac{(U_{j+1} - U_j)^2}{h}.$$

它非负; 若为零, 则所有 nodal differences 为零, 再由 homogeneous Dirichlet boundary 得 $U = 0$ 。矩阵又由 face flux assembly 显然 symmetric, 故 SPD。

arithmetic mean 与正确系数之比为

$$\frac{(a_- + a_+)/2}{2a_-a_+/(a_- + a_+)} = \frac{(a_- + a_+)^2}{4a_-a_+}.$$

若 $a_+/a_- = \kappa \rightarrow \infty$, 该比值约为 $\kappa/4$, 会无界放大 interface flux; 这不是高对比材料中的小 perturbation。

评分要点 (15 分) series-resistance relation 5 分; harmonic coefficient 与唯一性 3 分; SPD 4 分; arithmetic high-contrast error 3 分。

Problem 6 [20 points]

令 $s = 1 - x$ 。则

$$x - \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2} - \frac{s^2}{2}, \quad g(1-s) = g(1) - g'(1)s + O(s^2).$$

stationary endpoint 的 leading contribution 为

$$e^{i\lambda/2} g(1) \int_0^\infty e^{-i\lambda s^2/2} ds = e^{i\lambda/2 - i\pi/4} g(1) \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}.$$

下一项使用 Abel-regularized integral

$$\int_0^\infty s e^{-i\lambda s^2/2} ds = -\frac{i}{\lambda},$$

故贡献为 $ie^{i\lambda/2} g'(1)/\lambda$ 。

在非 stationary endpoint $x = 0$ ，先用一次 integration by parts 提取 boundary contribution $ig(0)/\lambda$ ，再对余项积分一次。用 partition of unity 分开两个 endpoints；中间区间反复 integration by parts, cutoff boundary terms 相消。由 $g \in C^3$ ，下一个 stationary term 为 $O(\lambda^{-3/2})$ 。因此

$$I(\lambda) = e^{i\lambda/2 - i\pi/4} g(1) \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}} + \frac{i}{\lambda} [e^{i\lambda/2} g'(1) + g(0)] + O(\lambda^{-3/2}).$$

$x = 1$ 处 $\phi'(1) = 0$ ，scale 为 $s = O(\lambda^{-1/2})$ ，产生 $O(\lambda^{-1/2})$ ； $x = 0$ 处 $\phi'(0) = 1$ ，ordinary endpoint cancellation 只产生 $O(\lambda^{-1})$ 。

评分要点 (20 分) 识别 stationary endpoint 与 scale 4 分；leading Fresnel term 5 分；stationary subleading term 4 分；nonstationary endpoint 4 分；remainder/orders 3 分。

Problem 7 [20 points]

由 $D \succ 0$ ，目标函数严格凸；feasible ball 是 compact set，故 minimizer 存在且唯一。

unconstrained minimizer 是 $x_0 = D^{-1}b$ 。若

$$\|D^{-1}b\|_2 < R,$$

则 $x^* = x_0$ 是严格 interior solution。若等号成立，同一 x_0 仍为唯一 minimizer，但位于 boundary 且 multiplier 为 $\lambda = 0$ 。

若 $\|D^{-1}b\|_2 > R$ ，约束 active。以 $\lambda(\|x\|_2^2 - R^2)/2$ 加入 Lagrangian，stationarity 给出

$$x_i(\lambda) = \frac{b_i}{d_i + \lambda}, \quad \lambda > 0.$$

定义

$$\psi(\lambda) = \sum_{i=1}^n \frac{b_i^2}{(d_i + \lambda)^2}.$$

它在 $[0, \infty)$ continuous，并因 $b \neq 0$ strictly decreasing；而 $\psi(0) > R^2$ 、 $\psi(\lambda) \rightarrow 0$ 。故存在唯一 root

$$\psi(\lambda) = R^2,$$

且相应 $x(\lambda)$ 是唯一 minimizer。又因

$$\psi\left(\frac{\|b\|_2}{R}\right) < R^2,$$

区间 $[0, \|b\|_2/R]$ 是可靠 bracket。可用 bisection 或 safeguarded Newton 求此 monotone scalar root；每次 evaluation 为 $O(n)$ 。

最后令 $R \downarrow 0$ 。此时 $\lambda \rightarrow \infty$ ，并且

$$x(\lambda) = \frac{1}{\lambda}b + O(\lambda^{-2}), \quad R = \|x(\lambda)\|_2 = \frac{\|b\|_2}{\lambda} + O(\lambda^{-2}).$$

所以

$$\boxed{\frac{x^*}{R} \longrightarrow \frac{b}{\|b\|_2}}.$$

评分要点 (20 分) strict convexity/existence 3 分；interior case 3 分；KKT reduction 5 分；scalar existence/uniqueness 4 分；algorithm 2 分；small-radius limit 3 分。