

Mock Qualifying Examination 04

参考解答与评分要点

Problems 1–5 共 80 分；Problems 6–7 二选一，计 20 分。以下评分拆分只用于阅卷，不构成题面对解法的提示。

Problem 1 [10 points]

写 $e = x - \alpha$ 。直接利用给定 factorization,

$$\begin{aligned} f' &= e^{m-1}(mh + eh'), \\ f'' &= e^{m-2}\{m(m-1)h + 2meh' + e^2h''\}. \end{aligned}$$

因此

$$f'^2 - ff'' = e^{2m-2}\{mh^2 + e^2[(h')^2 - hh'']\}.$$

括号内在 $e = 0$ 的值为 $mh(\alpha)^2 > 0$ ，所以当 $e \neq 0$ 且充分小时，denominator 非零。

再计算 step:

$$\begin{aligned} \frac{ff'}{f'^2 - ff''} &= e \frac{mh^2 + eh'h'}{mh^2 + e^2[(h')^2 - hh'']} \\ &= e + \frac{h'(\alpha)}{mh(\alpha)}e^2 + O(e^3). \end{aligned}$$

故误差满足

$$e_{k+1} = -\frac{h'(\alpha)}{mh(\alpha)}e_k^2 + O(e_k^3).$$

因此该方法至少局部二阶；若 $h'(\alpha) \neq 0$ ，恰为二阶，其带符号 leading error constant 为

$$-\frac{h'(\alpha)}{mh(\alpha)}.$$

若 $h'(\alpha) = 0$ ，二次项消失，阶数至少为三，不能仅凭现有条件断言恰为三阶。题目约定精确到根即终止，避免了在 $e = 0$ 代入表面上的 $0/0$ 。

评分要点 (10 分) denominator 展开与非零性 3 分；step 展开 4 分；阶数、常数及退化情形 3 分。

Problem 2 [20 points]

在次数不超过 n 的多项式空间上引入

$$\langle r, s \rangle_\star = \int_a^b (x-a)w(x)r(x)s(x) dx.$$

因为 $(x-a)w(x) > 0$ almost everywhere，这是正定内积。令 π_n 是相对于该内积的唯一 monic orthogonal polynomial of degree n 。标准的符号变化论证表明 π_n 有 n 个互异零点 $x_1, \dots, x_n$ ，且

全在 (a, b) : 否则把区间内奇重零点的因子相乘成次数小于 n 的 q , 则 $(x - a)w\pi_n q$ 不变号且不恒为零, 与 orthogonality 矛盾。

取 nodes 为 $a, x_1, \dots, x_n$, 并令 λ_j 为这 $n + 1$ 个节点上的 interpolatory quadrature weights。对任意 $p \in \mathcal{P}_{2n}$ 作除法

$$p(x) = q(x)(x - a)\pi_n(x) + r(x), \quad \deg q \leq n - 1, \quad \deg r \leq n.$$

第一项在所有 nodes 上为零, 且

$$\int_a^b w(x)q(x)(x - a)\pi_n(x) dx = 0.$$

第二项由 interpolation 精确积分。因此该 rule 对 $\mathcal{P}_{2n}$ 精确。

设 ℓ_j 是相应 cardinal polynomial。由于 $\ell_j^2 \in \mathcal{P}_{2n}$, exactness 给出

$$\lambda_j = \sum_{k=0}^n \lambda_k \ell_j(x_k)^2 = \int_a^b w(x) \ell_j(x)^2 dx > 0.$$

最后证明唯一性。若另一个同型 rule 具有内部 nodes $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n$, 令 $\hat{\pi}_n(x) = \prod_{j=1}^n (x - \hat{x}_j)$ 。对每个 $q \in \mathcal{P}_{n-1}$, 多项式 $(x - a)\hat{\pi}_n q$ 的次数不超过 $2n$, 且在全部 quadrature nodes 上为零。exactness 因而迫使

$$\int_a^b (x - a)w(x)\hat{\pi}_n(x)q(x) dx = 0.$$

monic orthogonal polynomial 的唯一性给出 $\hat{\pi}_n = \pi_n$, 所以 nodes 相同; interpolatory weights 也唯一。于是所求 rule 存在且唯一。

评分要点 (20 分) 发现 modified inner product 与 nodes 5 分; 零点位置 3 分; degree- $2n$ exactness 5 分; weights 正性 3 分; 唯一性 4 分。

Problem 3 [20 points]

由 $Q^T Q = I$,

$$\|AQ - B\|_F^2 = \|A\|_F^2 + \|B\|_F^2 - 2 \operatorname{tr}(Q^T A^T B).$$

令

$$M = A^T B = U \Sigma V^T, \quad \Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n), \quad \sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0.$$

若 $R = U^T Q V$, 则 R orthogonal, 且

$$\operatorname{tr}(Q^T M) = \operatorname{tr}(R^T \Sigma) = \sum_{i=1}^n \sigma_i R_{ii} \leq \sum_{i=1}^n \sigma_i.$$

所以一个 minimizer 是 $Q_\star = UV^T$, 并且

$$\min \|AQ - B\|_F = \left(\|A\|_F^2 + \|B\|_F^2 - 2 \sum_{i=1}^n \sigma_i (A^T B) \right)^{1/2}.$$

令 $r = \text{rank } M$ 。等号要求 $R_{ii} = 1$ 对所有 $i \leq r$ 。orthogonal matrix 的某个 diagonal entry 等于 1 时，相应 coordinate vector 必须被固定；故所有 minimizers 恰为

$$Q = U \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix} V^T, \quad W \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}, \quad W^T W = I.$$

这个描述对所选 singular-vector bases 成立。特别地，minimizer 唯一当且仅当

$$A^T B \text{ is nonsingular.}$$

若 $r < n$ ，null singular subspaces 上至少有两个 orthogonal choices（当 $n - r = 1$ 时为 $W = \pm 1$ ），所以不唯一。

评分要点（20 分） Frobenius-to-trace reduction 4 分；隐藏 SVD 结构 5 分；最小值 3 分；全部 minimizers 5 分；唯一性 iff 3 分。

Problem 4 [15 points]

在 n 个 time steps 后， U_0^n 只能依赖初始 indices

$$-np \leq j \leq nq.$$

因此当 $n\tau = T$ 时，numerical domain of dependence 在初始直线上的物理区间为

$$I_{\text{num}}(T) = \left[-pT\frac{h}{\tau}, qT\frac{h}{\tau} \right].$$

而 advection equation 的 characteristic 给出

$$u(0, T) = u_0(-cT),$$

所以 exact foot 是 $-cT$ 。

若 $\nu > p$ ，则 $-cT$ 严格位于 $I_{\text{num}}(T)$ 左侧；若 $\nu < -q$ ，则它严格位于右侧。以第一种情形为例，由于 Courant number 固定，exact foot 与 numerical interval 的距离为一个与网格无关的正数。可选择两个 C_c^∞ initial data，它们在 $I_{\text{num}}(T)$ 的邻域完全相同，却在 $-cT$ 取不同值。对每一个网格，两次 numerical calculation 在 $(0, T)$ 给出完全相同的值，因为所有进入该值的初始 grid samples 都落在 $I_{\text{num}}(T)$ ；但两 exact solutions 在 $(0, T)$ 的值不同。这与 scheme 对两组数据均收敛矛盾。另一侧同理。

所以 exact domain of dependence 必须包含在 numerical one 中，亦即

$$-pT\frac{h}{\tau} \leq -cT \leq qT\frac{h}{\tau}.$$

约去 T 并重排，得到

$$-q \leq \frac{c\tau}{h} \leq p.$$

论证只使用 stencil dependency； a_ℓ 的正负与必要条件无关。

评分要点 (15 分) n 步 dependency interval 4 分; exact characteristic foot 3 分; smooth-data 反证构造 5 分; 最终不等式及 coefficient-sign 说明 3 分。

Problem 5 [15 points]

记 L_h 为题中左端离散算子。对 exact samples 作 Taylor expansion:

$$(L_h u)_j - f(x_j) = O(h^2), \quad 1 \leq j < N,$$

而利用 $u'(0) = 0$,

$$\begin{aligned} (L_h u)_0 - f(0) &= \frac{2[u(0) - u(h)]}{h^2} - f(0) \\ &= -\frac{h}{3}u'''(0) + O(h^2). \end{aligned}$$

所以 boundary local truncation 一般仅为

$$\boxed{O(h)}.$$

令 $e_j = U_j - u(x_j)$, 并以 $\tau_j = (L_h u)_j - f(x_j)$ 记 residual。则 $L_h e = -\tau$ 且 $e_N = 0$ 。定义离散斜率

$$d_j = \frac{e_j - e_{j-1}}{h}, \quad 1 \leq j \leq N.$$

边界误差方程给出

$$-\frac{2d_1}{h} = -\tau_0, \quad d_1 = \frac{h}{2}\tau_0 = O(h^2).$$

interior equation 给出

$$\frac{d_j - d_{j+1}}{h} = -\tau_j, \quad d_{j+1} = d_j + h\tau_j.$$

因为 $\tau_j = O(h^2)$ uniformly,

$$|d_j| \leq |d_1| + h \sum_{k=1}^{j-1} |\tau_k| = O(h^2).$$

最后由 $e_N = 0$,

$$e_j = -h \sum_{k=j+1}^N d_k,$$

从而

$$\boxed{\|e\|_\infty = O(h^2)}.$$

因此该 boundary closure 是 pointwise first-order consistent, 却在这个一维 mixed problem 中仍给出 second-order global maximum-norm convergence。若 exact solution 恰使 $u'''(0) = 0$, boundary residual 可能更高阶, 但一般结论不变。二阶还是 sharp 的: 取 $u(x) = x^3$, 则 $f(x) = -6x$, $\beta = 1$, interior residual 恰为零而 $\tau_0 = -2h$ 。上面的递推给出

$$d_j = -h^2, \quad e_j = (1 - x_j)h^2,$$

所以 $\|e\|_\infty = h^2$ 。

评分要点 (15 分) boundary Taylor residual 4 分; error-slope reformulation 4 分; slope 累积界 4 分; global order 与特殊情形 3 分。

Problem 6 [20 points]

令

$$\phi_{mn}(x, y) = \frac{2}{\pi} \sin(mx) \sin(ny).$$

它们为 $L^2(\Omega)$ -orthonormal, 且 $-\Delta\phi_{mn} = (m^2 + n^2)\phi_{mn}$ 。因此 eigenvalue 5 的 eigenspace 是

$$E = \text{span}\{\phi_{12}, \phi_{21}\}.$$

设 $V(x, y) = \cos x \cos y$ 。若 $u = u_0 + \varepsilon u_1 + \dots$, $\lambda = 5 + \varepsilon\mu + \dots$, 则一阶方程为

$$(-\Delta - 5)u_1 = -(V - \mu)u_0.$$

右端必须与整个 E 正交。因此 u_0 必须是 V restricted to E 的 eigenvector, 而不是任取一个 coordinate eigenfunction 后只检查一个 scalar condition。

在 ordered basis (ϕ_{12}, ϕ_{21}) 中, 利用

$$\left\langle \sqrt{2/\pi} \sin x, \cos x \sqrt{2/\pi} \sin 2x \right\rangle = \frac{1}{2},$$

且 diagonal integrals 为零, 得到 perturbation matrix

$$H_E = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 \\ 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

其 normalized eigenvectors 为 $(1, 1)^T/\sqrt{2}$ 与 $(1, -1)^T/\sqrt{2}$, eigenvalues 为 $1/4$ 与 $-1/4$ 。故

$$\lambda_{\pm}(\varepsilon) = 5 \pm \frac{\varepsilon}{4} + O(\varepsilon^2), \quad u_{\pm} = \frac{\phi_{12} \pm \phi_{21}}{\sqrt{2}} + O(\varepsilon).$$

这里两个 signs 按相同顺序配对。由于一阶修正已分离, 在充分小非零 ε 下两支为 simple branches; 题目只要求 formal first-order expansion, 不需要调用更高级的 operator perturbation theorem。

评分要点 (20 分) 识别二维 eigenspace 4 分; 完整 solvability projection 4 分; 矩阵元素 5 分; splitting 与 eigenfunctions 5 分; simple-eigenvalue 误区 2 分。

Problem 7 [20 points]

F 连续且当 $\|x\| \rightarrow \infty$ 时趋于无穷, 因此 minimizer 存在。又因三个 vertices 不共线, F 严格凸: 若在连接两个不同点的线段上出现凸性等号, 则三个 Euclidean norms 的 triangle inequalities 必须同时取等号, 这会迫使三个 vertices 全落在同一直线上。因此 minimizer 唯一。

先考察 vertex a_k 。记

$$s_k = \sum_{i \neq k} \frac{a_k - a_i}{\|a_k - a_i\|_2}.$$

沿任意方向 d 的 one-sided directional derivative 为

$$F'(a_k; d) = \|d\|_2 + s_k^T d.$$

它对所有 d 非负当且仅当 $\|s_k\|_2 \leq 1$ 。若 θ_k 是 triangle 在 a_k 的内角, 则

$$\|s_k\|_2^2 = 2 + 2 \cos \theta_k.$$

故

$$\|s_k\|_2 \leq 1 \iff \theta_k \geq 120^\circ.$$

由 convexity, 这正是 a_k 成为 minimizer 的充要条件。

若所有内角都小于 120° , minimizer $x_\star$ 不是 vertex。在可微点的一阶条件为

$$\sum_{i=1}^3 \frac{x_\star - a_i}{\|x_\star - a_i\|_2} = 0.$$

三个 unit vectors 之和为零当且仅当它们两两夹角均为 120° 。此外 $x_\star$ 不可能在 triangle 外: 若在外部, separating line 给出一个方向 d , 使所有 $d^T(x_\star - a_i) > 0$, 与上述 vector sum 为零矛盾。因此 $x_\star$ 是 triangle 内部或边界上的点。若它位于某条边的 relative interior, 取该边指向 triangle 内部的法向量 d ; 则 $d^T(x_\star - a_i) \geq 0$ 对三个 vertices 成立, 且对相对 vertex 严格为正, 同样与 vector sum 为零矛盾。因此 $x_\star$ 确为 triangle 内部唯一一点, 且连接它与三个 vertices 的三条线段两两成 120° 。反过来, 任何满足该几何条件的内部点使 gradient 为零, 故由严格 convexity 必为唯一 minimizer。

综上: 若某内角至少 120° , 该 vertex 是 minimizer; 否则 minimizer 是唯一的 interior Fermat point, 其三条连线两两成 120° 。

评分要点 (20 分) 存在与严格唯一性 4 分; vertex directional condition 5 分; 120° 判据 3 分; interior gradient geometry 5 分; 不预设内部位置的论证 3 分。