

Mock Qualifying Examination 03

参考解答与评分要点

Problems 1–5 共 80 分；Problems 6–7 二选一，计 20 分。以下评分拆分只用于阅卷，不构成题面对解法的提示。

Problem 1 [10 points]

$f' > 0$ 先说明零点唯一。记 $e_k = x_k - \alpha$ 。当 $e_k \neq 0$ 时，mean-value theorem 给出某个位于 x_k 与 α 之间的 ξ_k ，使

$$f(x_k) = f'(\xi_k)e_k.$$

因此

$$e_{k+1} = (1 - \omega f'(\xi_k))e_k, \quad |e_{k+1}| \leq q(\omega)|e_k|,$$

其中

$$q(\omega) = \max_{m \leq s \leq M} |1 - \omega s| = \max\{|1 - \omega m|, |1 - \omega M|\}.$$

对所有允许的 f 与初值都保证 contraction，等价于 $q(\omega) < 1$ ，即

$$0 < \omega < \frac{2}{M}.$$

此时 $|e_k| \leq q(\omega)^k |e_0| \rightarrow 0$ 。

为了最小化 worst-case factor，应平衡区间两端的带符号误差：

$$1 - \omega m = -(1 - \omega M).$$

故

$$\omega_\star = \frac{2}{m+M}, \quad q_\star = \frac{M-m}{M+m}.$$

这个结论包括 $m = M$ 的情形，此时 $q_\star = 0$ ，一次到达根。

端点也是 sharp 的。若 $\omega = 0$ ，非根初值保持不动；若 $\omega = 2/M$ ，取 $f(x) = M(x - \alpha)$ ，则 $e_{k+1} = -e_k$ ，一般不收敛；若 $\omega > 2/M$ ，同一个线性例子给出 $|e_{k+1}| > |e_k|$ 。因此不能扩大上述区间。

评分要点（10 分） 误差的 mean-value 表示 2 分；完整收敛区间 3 分；minimax 参数与因子 3 分；端点 sharpness 2 分。

Problem 2 [20 points]

令 s 为通过两个端点的 secant line：

$$s(x) = f(a) + \mu(x - a), \quad \mu = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

由 mean-value theorem 和 $f'' > 0$ ，存在唯一 $\xi \in (a, b)$ 使

$$f'(\xi) = \mu.$$

函数 $f - s$ 严格凸，在两端为零，并在 ξ 取得唯一最小值。记

$$D = s(\xi) - f(\xi) > 0.$$

则 $-D \leq f(x) - s(x) \leq 0$ 。定义

$$p^*(x) = s(x) - \frac{D}{2}.$$

其误差满足

$$f(a) - p^*(a) = \frac{D}{2}, \quad f(\xi) - p^*(\xi) = -\frac{D}{2}, \quad f(b) - p^*(b) = \frac{D}{2},$$

且在整个区间内绝对值不超过 $D/2$ 。因此候选误差为 $D/2$ 。

下面同时证明最优性和唯一性。设另一个 affine function 为 $p = p^* + q$ ，且 $\|f - p\|_\infty \leq D/2$ 。在 a, b 处检查误差给出

$$q(a) \geq 0, \quad q(b) \geq 0;$$

在 ξ 处给出 $q(\xi) \leq 0$ 。但 affine function 在内部点的值是端点值的严格 convex combination，故 $q(\xi) \geq 0$ 。于是 $q(\xi) = 0$ ，并进一步迫使 $q(a) = q(b) = 0$ ，所以 $q \equiv 0$ 。这证明 p^* 是唯一 minimizer；若存在误差严格小于 $D/2$ 的直线，上述符号将立即矛盾。

对 $f(x) = e^x$ 、 $[-1, 1]$ ，secant line 为

$$s(x) = \cosh 1 + x \sinh 1.$$

内部点由 $e^\xi = \sinh 1$ 确定，即

$$\xi = \log(\sinh 1).$$

因此

$$D = \cosh 1 + \sinh 1 \log(\sinh 1) - \sinh 1,$$

并且

$$p^*(x) = \cosh 1 + x \sinh 1 - \frac{D}{2}, \quad \|e^x - p^*\|_\infty = \frac{D}{2}.$$

评分要点 (20 分) secant 与唯一内部点 4 分；构造及误差界 5 分；最优性 4 分；唯一性 3 分； e^x 应用 4 分。

Problem 3 [20 points]

取 A 的 orthonormal eigenbasis $v_1, \dots, v_n$ ，写

$$x_k = c_1 v_1 + \sum_{j=2}^n c_j v_j, \quad |c_1| = \cos \theta, \quad \left(\sum_{j=2}^n c_j^2 \right)^{1/2} = \sin \theta,$$

其中 $\theta = \angle(x_k, v_1) \in [0, \pi/2]$ 。Rayleigh quotient 满足

$$\rho_k - \lambda_1 = \sum_{j=2}^n (\lambda_j - \lambda_1) c_j^2.$$

特别地，

$$(\lambda_2 - \lambda_1) \sin^2 \theta \leq \rho_k - \lambda_1 \leq (\lambda_n - \lambda_1) \sin^2 \theta.$$

若 $x_k \neq v_1$ 且 θ 足够小, 则

$$\lambda_1 < \rho_k < \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2},$$

所以 $A - \rho_k I$ 非奇异, 迭代有定义。

在同一 eigenbasis 中,

$$y_k = \frac{c_1}{\lambda_1 - \rho_k} v_1 + \sum_{j=2}^n \frac{c_j}{\lambda_j - \rho_k} v_j.$$

归一化不改变角度, 因而

$$\begin{aligned} \tan \angle(x_{k+1}, v_1) &\leq \frac{\rho_k - \lambda_1}{\lambda_2 - \rho_k} \tan \theta \\ &\leq \frac{2(\lambda_n - \lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1} \sin^2 \theta \tan \theta \leq C \tan^3 \theta. \end{aligned}$$

这证明 eigenvector angle 的局部 cubic convergence。

再用 Rayleigh quotient error 与 $\sin^2 \theta$ 的上下等价关系, 得到

$$0 \leq \rho_{k+1} - \lambda_1 \leq C(\rho_k - \lambda_1)^3.$$

因此 Rayleigh quotients 对 λ_1 也具有局部 cubic order; 若某一步已是 v_1 , 算法按题意终止, 避免求解 singular shifted system。

评分要点 (20 分) 谱坐标及 Rayleigh error 5 分; 局部 well-definedness 3 分; 角度比值公式 5 分; cubic bound 4 分; eigenvalue order 3 分。

Problem 4 [15 points]

记 commutator $[A, B] = AB - BA$ 。直接把三个指数分别展开到三阶并相乘, 可得

$$S_\tau - e^{\tau(L+Q)} = -\frac{\tau^3}{24}[Q, [Q, L]] - \frac{\tau^3}{12}[L, [Q, L]] + O(\tau^4).$$

一、二阶项完全一致, 所以 local error 为 $O(\tau^3)$ 。在固定终止时间上, 下面的 stability 使 telescoping error sum 有界, 故该 time discretization 全局二阶。

由于 L, Q 都 symmetric negative semidefinite,

$$\|e^{tL}\|_2 \leq 1, \quad \|e^{tQ}\|_2 \leq 1 \quad (t \geq 0).$$

于是

$$\boxed{\|S_\tau\|_2 \leq 1 \quad \text{for every } \tau > 0,}$$

即无条件 ℓ^2 contractivity。

对 nonsymmetric product, 二阶展开给

$$e^{\tau Q} e^{\tau L} - e^{\tau(L+Q)} = \frac{\tau^2}{2}[Q, L] + O(\tau^3),$$

所以一般只有 global first order。若 $LQ = QL$, 所有 commutators 都消失, 且

$$e^{\tau Q/2} e^{\tau L} e^{\tau Q/2} = e^{\tau Q} e^{\tau L} = e^{\tau(L+Q)};$$

两种 splitting 都是精确的。

评分要点 (15 分) 直接展开及 leading commutators 6 分; local/global order 3 分; 无条件稳定 3 分; Lie product 和 commuting case 3 分。

Problem 5 [15 points]

令 $e^{(k)} = U^{(k)} - U^*$ 。对周期 Fourier mode $e_j = e^{ij\theta}$, 有

$$A_h e = \frac{2 - 2 \cos \theta}{h^2} e.$$

故一次 weighted Jacobi step 的 amplification factor 为

$$g_\omega(\theta) = 1 - \omega \frac{2 - 2 \cos \theta}{2} = 1 - \omega(1 - \cos \theta).$$

在 $\pi/2 \leq |\theta| \leq \pi$ 上, 令 $s = 1 - \cos \theta \in [1, 2]$, 于是要最小化

$$\max_{1 \leq s \leq 2} |1 - \omega s| = \max\{|1 - \omega|, |1 - 2\omega|\}.$$

最优时两端等幅反号,

$$1 - \omega = -(1 - 2\omega),$$

所以

$$\boxed{\omega_* = \frac{2}{3}, \text{quad} \max_{\pi/2 \leq |\theta| \leq \pi} |g_{\omega_*}(\theta)| = \frac{1}{3}.}$$

这说明一次迭代能把整个高频区的误差至少缩小到三分之一。

但 $\theta = 0$ 的 constant mode 满足 $g_\omega(0) = 1$; 这也对应 periodic Poisson matrix 的 nullspace。即使限制在 mean-zero subspace, 最小非零波数 $\theta_{\min} = 2\pi/N = O(h)$ 仍满足

$$g_{2/3}(\theta_{\min}) = 1 - \frac{2}{3}(1 - \cos \theta_{\min}) = 1 - O(h^2).$$

因此 spectral radius 随 $h \rightarrow 0$ 趋于 1, 消除低频误差需要 $O(h^{-2})$ 次量级的迭代。weighted Jacobi 是有效的 high-frequency smoother, 却不是 mesh-independent solver; 两者不能混同。

评分要点 (15 分) 求出 mode amplification 4 分; 高频 minimax 问题 3 分; 最优权重与因子 4 分; constant/low-frequency 失效及 mesh dependence 4 分。

Problem 6 [20 points]

令慢时间 $T = \varepsilon t$, 并设

$$y_0(t, T) = A(T)e^{it} + \overline{A(T)}e^{-it}.$$

在 $O(\varepsilon)$ 方程中消去 e^{it} 的 resonant forcing, 得到

$$2iA_T + 2i\zeta A + 3\gamma|A|^2 A - \frac{F}{2}e^{i\sigma T} = 0.$$

进入随 forcing 旋转的 frame: $A(T) = B(T)e^{i\sigma T}$ 。则 slow complex amplitude 满足

$$\boxed{2iB_T + (-2\sigma + 2i\zeta)B + 3\gamma|B|^2 B - \frac{F}{2} = 0.}$$

这就是 leading modulation equation; 其解配合

$$y(t) \approx B(\varepsilon t)e^{i(1+\varepsilon\sigma)t} + \overline{B(\varepsilon t)}e^{-i(1+\varepsilon\sigma)t}$$

在 slow time $T = O(1)$ 上给出 formal leading response。

steady locked response 满足 $B_T = 0$ 。令 physical amplitude $R = 2|B|$, 对复代数方程取模, 得到

$$R^2 \left[\left(\sigma - \frac{3\gamma R^2}{8} \right)^2 + \zeta^2 \right] = \frac{F^2}{4}.$$

这是关于 R^2 的 cubic equation, 并不必有唯一正根。例如令 $s = R^2$ 、 $k = 3\gamma/8$, 左端函数为

$$G(s) = s[(\sigma - ks)^2 + \zeta^2].$$

若 $k\sigma > 0$ 且 $|\sigma| > \sqrt{3}\zeta$, 则 $G'(s)$ 有两个正零点; 对介于相应局部极值之间的 forcing levels, 可有三个正 steady amplitudes。若 $\gamma = 0$, 左端对 s 为线性, steady amplitude 唯一。题目未要求的 branch stability 不能仅由这条 response curve 推断。

评分要点 (20 分) slow scale 与 leading ansatz 3 分; resonance removal 及 complex modulation 7 分; rotating frame 3 分; steady response curve 5 分; 多幅值条件解释 2 分。

Problem 7 [20 points]

对 basic indices, 由 $A_B^T y = c_B$ 可知 reduced costs 为零。记

$$r_N = c_N - A_N^T y.$$

对任意 feasible x , 利用 $Ax = b$, 有

$$c^T x - b^T y = (c - A^T y)^T x = r_N^T x_N.$$

若 $r_N > 0$ componentwise, 则 x^* 达到 dual lower bound $b^T y$, 故最优。任一不同的 feasible x 必有某个 nonbasic component 为正: 否则 $x_N = 0$ 且 $A_B x_B = b$ 会迫使 $x_B = x_B^*$ 。所以 $r_N^T x_N > 0$, 从而 $c^T x > c^T x^*$ 。因此 x^* 是唯一最优解。

反过来, 固定一个 nonbasic column a_j , 定义 feasible direction

$$d_j = 1, \quad d_{N \setminus \{j\}} = 0, \quad d_B = -A_B^{-1} a_j.$$

则 $Ad = 0$, 并且

$$c^T d = c_j - c_B^T A_B^{-1} a_j = r_j.$$

由于 $x_B^* > 0$, 对充分小的 $t > 0$, $x^* + td \geq 0$; 这正是 nondegeneracy 被使用之处。

若 $r_j < 0$, 上述 feasible point 的目标值更小, x^* 不是最优。若 $r_j = 0$, 则得到另一个不同的 feasible point, 且目标值相同, 所以 x^* 不是唯一最优。故唯一最优必然要求每个 $r_j > 0$ 。综上,

$$x^* \text{ unique optimal} \iff c_N - A_N^T y > 0 \text{ componentwise.}$$

评分要点 (20 分) reduced-cost identity 5 分; 严格正性的充分性与唯一性 5 分; 构造 feasible edge direction 5 分; 负/零 reduced cost 及 nondegeneracy 作用 5 分。