

Mock Qualifying Examination 02

参考解答与评分要点

Problems 1–5 共 80 分；Problems 6–7 二选一，计 20 分。以下评分拆分只用于阅卷，不构成题面对解法的提示。

Problem 1 [10 points]

先证 fixed point 的存在唯一性。因为 $\phi([a, b]) \subset [a, b]$,

$$\phi(a) - a \geq 0, \quad \phi(b) - b \leq 0,$$

连续性给出至少一个不动点。若 $x < y$, 则 $\phi(x) \geq \phi(y)$, 从而

$$[\phi(x) - x] - [\phi(y) - y] = \phi(x) - \phi(y) + y - x > 0.$$

故 $\phi(x) - x$ 严格递减, 零点 α 唯一。

令 $\psi = \phi \circ \phi$ 。由 chain rule,

$$|\psi'(x)| = |\phi'(\phi(x))\phi'(x)| \leq q.$$

于是 ψ 在 $[a, b]$ 上是 contraction, 且 $\psi(\alpha) = \alpha$ 。对每个 $k \geq 0$, mean-value theorem 给出

$$|x_{k+2} - \alpha| \leq q |x_{k+1} - \alpha|.$$

因此偶子列和奇子列都以至多 q 的线性因子趋于 α , 整个序列也收敛到 α 。迭代点还给出 posteriori estimates

$$|x_k - \alpha| \leq \frac{|x_{k+2} - x_k|}{1 - q}, \quad |x_{k+2} - \alpha| \leq \frac{q}{1 - q} |x_{k+2} - x_k|,$$

它们由 contraction 的标准 telescoping bound 得到。注意, 论证并未要求 ϕ 本身在一步内是 contraction。

评分要点 (10 分) 不动点存在唯一性 3 分; 识别第二迭代及 contraction 4 分; 两步误差估计和全序列收敛 3 分。

Problem 2 [20 points]

对固定 $x \in [0, 1]$, 令 K 服从参数为 (n, x) 的 binomial distribution。题目中的权重之和为 1, 故

$$(B_n f)(x) = \mathbb{E} f(K/n).$$

记 $Y = K/n$ 。直接由 binomial moments 得

$$\mathbb{E}(Y - x) = 0, \quad \mathbb{E}(Y - x)^2 = \frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{1}{4n}.$$

先设 f 仅连续。给定 $\delta > 0$, 用 f 的 modulus of continuity ω_f 和 Chebyshev inequality,

$$\begin{aligned} |B_n f(x) - f(x)| &\leq \omega_f(\delta) + 2 \|f\|_\infty \mathbb{P}(|Y - x| > \delta) \\ &\leq \omega_f(\delta) + \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}. \end{aligned}$$

右端与 x 无关。先取 δ 小, 再令 $n \rightarrow \infty$, 便得 $\|B_n f - f\|_\infty \rightarrow 0$ 。在 $x = 0, 1$ 时 $Y = x$ 几乎必然, 算子事实上精确, 故端点也已包含。

下面设 $f \in C^2[0, 1]$ 。一致 Taylor 展开可写成

$$f(y) = f(x) + f'(x)(y - x) + \frac{1}{2}f''(x)(y - x)^2 + (y - x)^2\rho(x, y),$$

其中当 $|y - x| \rightarrow 0$ 时, $\rho(x, y) \rightarrow 0$ 对 $x, y \in [0, 1]$ 一致成立。取期望后, 线性项消失, 故

$$n(B_n f(x) - f(x)) = \frac{x(1-x)}{2}f''(x) + n\mathbb{E}[(Y - x)^2\rho(x, Y)].$$

只需一致控制最后一项。binomial 四阶中心矩为

$$\mathbb{E}(Y - x)^4 = \frac{3x^2(1-x)^2}{n^2} + \frac{x(1-x)[1 - 6x(1-x)]}{n^3},$$

因而其绝对值一致为 $O(n^{-2})$ 。给定 $\delta > 0$, 把期望按 $|Y - x| \leq \delta$ 与其补集分开。第一部分不超过

$$\frac{1}{4} \sup_{|y-x| \leq \delta} |\rho(x, y)|,$$

第二部分由

$$n\mathbb{E}[(Y - x)^2 \mathbf{1}_{|Y-x|>\delta}] \leq \frac{n}{\delta^2} \mathbb{E}(Y - x)^4 = O((n\delta^2)^{-1})$$

控制。先令 $n \rightarrow \infty$, 再令 $\delta \downarrow 0$, 余项一致趋零。因此

$$\boxed{n(B_n f - f) \rightarrow \frac{x(1-x)}{2}f''(x) \quad \text{uniformly on } [0, 1].}$$

评分要点 (20 分) 识别权重及二阶矩 4 分; 连续函数的一致收敛 5 分; 二阶 Taylor 主项 4 分; 四阶矩与一致余项控制 5 分; 端点检查 2 分。

Problem 3 [20 points]

取正交谱分解

$$A = Q\Lambda Q^T, \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad \lambda_i > 0.$$

令 $Y = Q^T X Q$ 、 $D = Q^T C Q$, 原方程化为

$$(\lambda_i + \lambda_j)Y_{ij} = D_{ij}.$$

因此唯一解为

$$\boxed{Y_{ij} = \frac{D_{ij}}{\lambda_i + \lambda_j}, \quad X = QYQ^T.}$$

D 对称, 所以 Y 与 X 也对称。一个 eigendecomposition、两次 basis transforms 和逐元素除法的总 arithmetic cost 为 $O(n^3)$ 。

在 Frobenius inner product 下, 矩阵 $q_i q_j^T$ 构成正交基, 且

$$\mathcal{L}(q_i q_j^T) = (\lambda_i + \lambda_j) q_i q_j^T.$$

故

$$\|\mathcal{L}\|_{F \rightarrow F} = 2\lambda_{\max}(A), \quad \|\mathcal{L}^{-1}\|_{F \rightarrow F} = \frac{1}{2\lambda_{\min}(A)}.$$

于是 sharp condition number 为

$$\boxed{\kappa_F(\mathcal{L}) = \frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)} = \kappa_2(A).}$$

最后, $C \succeq 0$ 的确蕴含 $X \succeq 0$, 但不能用 A, C 同时对角化, 因为它们未必 commute。定义

$$\tilde{X} = \int_0^\infty e^{-tA} C e^{-tA} dt.$$

由于 $A \succ 0$, 积分收敛。对 integrand 求导并积分,

$$\begin{aligned} A\tilde{X} + \tilde{X}A &= - \int_0^\infty \frac{d}{dt} (e^{-tA} C e^{-tA}) dt \\ &= C. \end{aligned}$$

由唯一性, $\tilde{X} = X$ 。若 $C \succeq 0$, 每个 $e^{-tA} C e^{-tA}$ 都 positive semidefinite, 其积分也同样, 故

$$\boxed{C \succeq 0 \implies X \succeq 0.}$$

评分要点 (20 分) 谱化和唯一解 6 分; 算法与复杂度 3 分; operator condition number 5 分; 不依赖 commutativity 的 positivity 证明 6 分。

Problem 4 [15 points]

对光滑解作 Taylor 展开, 中心时间差分 and 中心空间差分分别有二阶误差, 故 normalized local truncation error 为

$$O(\tau^2 + h^2).$$

令 $\nu = a\tau/h$, 代入 mode $U_j^m = \zeta^m e^{ij\theta}$, 得到

$$\zeta^2 + 2i\nu \sin \theta \zeta - 1 = 0,$$

其两根为

$$\zeta_{\pm} = -i\nu \sin \theta \pm \sqrt{1 - \nu^2 \sin^2 \theta}.$$

当 $|\nu| < 1$ 时, 两根不同、都在单位圆上, 而且它们之间的距离一致不小于 $2\sqrt{1 - \nu^2} > 0$ 。因此由任意两层起始值确定的两个 mode coefficients 一致有界, 格式在周期网格族上稳定。

若 $|\nu| > 1$, 可以选择网格波数使 $|\nu \sin \theta| > 1$, 此时一根在单位圆外, 格式不稳定。若 $|\nu| = 1$, 在含 $\theta = \pi/2$ 的周期网格上两根重合为 $-i \operatorname{sign}(\nu)$ 。一般解含

$$(c_1 + mc_2)\zeta^m,$$

故对 arbitrary two-level starting data 出现线性增长。于是题目所要求的 uniform stability 的精确范围是

$$|a\tau/h| < 1.$$

当 $\theta \rightarrow 0$ 时, $\zeta_+ \rightarrow 1$, 它逼近物理 advection mode; 另一根 $\zeta_- \rightarrow -1$, 会在相邻时间层之间交替符号, 是 three-level recurrence 额外携带的 computational/parasitic mode。特殊启动可以压低它, 但这不能替代对任意两层数据的稳定性要求。

评分要点 (15 分) 一致性 3 分; 二次 amplification equation 4 分; 严格稳定区间及端点重根 6 分; physical/computational modes 2 分。

Problem 5 [15 points]

记

$$P = \frac{bh}{2\varepsilon}.$$

在 interior node, centered scheme 为

$$-\frac{\varepsilon}{h^2}(1+P)U_{j-1} + \frac{2\varepsilon}{h^2}U_j - \frac{\varepsilon}{h^2}(1-P)U_{j+1} = f_j.$$

当且仅当 $|P| \leq 1$ 时两个 off-diagonal coefficients 都非正。此时若 $L_h V \geq 0$ 且 boundary values of V 非负, 负的 interior minimum 与上述系数符号矛盾; 等号情形可沿非零的相邻系数一直传播至 boundary。因此成立 discrete comparison principle:

$$\frac{|b|h}{2\varepsilon} \leq 1.$$

为看出条件的必要性及其数值后果, 令 $f = 0$ 。除常数根外, homogeneous recurrence 的另一个 characteristic root 是

$$r = \frac{1+P}{1-P}.$$

例如取 boundary data $U_0 = 0, U_N = 1$, 当 $P \neq 1$ 时

$$U_j = \frac{r^j - 1}{r^N - 1}.$$

若 $|P| > 1$, 则 $r < 0$, 相邻 powers 交替符号。上述离散解因而在相邻节点间产生 mesh-scale oscillation, 并对适当的 j 越出 boundary interval $[0, 1]$, 所以 comparison principle 失败。这也说明该阈值不只是一个方便的充分条件。

在 $P = 1$ 时右侧 off-diagonal coefficient 为零, recurrence 退化为单向的 lower bidiagonal system; 在 $P = -1$ 时左侧 coefficient 为零, 得到相反方向的 upper bidiagonal system。两者仍保持 comparison principle, 故阈值等号必须包含。

评分要点 (15 分) 写出 stencil 及无量纲阈值 4 分; comparison principle 的充分性 4 分; characteristic root 与阈值外振荡 5 分; 等号退化情形 2 分。

Problem 6 [20 points]

“形状只通过 rescaling 变化”提示设

$$u(x, t) = t^{-\alpha} F(\xi), \quad \xi = xt^{-\beta}.$$

质量不随时间变化给 $\alpha = \beta$; PDE 两边幂次平衡给

$$\alpha + 1 = 2\alpha + 2\beta.$$

所以

$$\alpha = \beta = \frac{1}{3}.$$

profile equation 为

$$-\frac{1}{3}(F + \xi F') = (F^2)''.$$

构造关于 $\xi = 0$ 对称的解。在正集上积分一次，并使用中心处零 flux，得到

$$-\frac{1}{3}\xi F = (F^2)' = 2FF'.$$

因此在 $F > 0$ 处

$$F' = -\frac{\xi}{6}, \quad F(\xi) = C - \frac{\xi^2}{12}.$$

取正部便得到 compactly supported profile

$$F(\xi) = \left(C - \frac{\xi^2}{12}\right)_+.$$

设 $L = \sqrt{12C}$ 。质量为

$$M = \int_{-L}^L \left(C - \frac{\xi^2}{12}\right) d\xi = \frac{8\sqrt{3}}{3} C^{3/2}.$$

故

$$C = \left(\frac{3M}{8\sqrt{3}}\right)^{2/3}.$$

最终解是

$$u(x, t) = t^{-1/3} \left(C - \frac{x^2}{12t^{2/3}}\right)_+.$$

peak 为 $Ct^{-1/3}$, support 为

$$|x| < \sqrt{12C} t^{1/3}.$$

在正集内，上述 profile ODE 已验证 PDE。移动界面处 $F = 0$ ，并且 $(F^2)' = 2FF' = 0$ ，所以 physical flux $(u^2)_x$ 从正集一侧趋于零；外侧也为零。这是题目所要求的 interface check，并未借用额外 weak-solution theory。

评分要点 (20 分) 尺度指数 5 分；profile ODE 与解 6 分；质量常数 4 分；peak/support 2 分；PDE 和 interface flux 验证 3 分。

Problem 7 [20 points]

令 $V_k(x)$ 表示在状态 $x_k = x$ 时从第 k 步到终点的最小 cost。终端条件为

$$V_N(x) = q_f x^2.$$

归纳设 $V_{k+1}(x) = p_{k+1}x^2$ 。Bellman recursion 给

$$V_k(x) = qx^2 + \min_u \{ru^2 + p_{k+1}(ax + u)^2\}.$$

因为 $r + p_{k+1} > 0$, minimizer 唯一, 且

$$u_k^* = -\frac{ap_{k+1}}{r + p_{k+1}}x_k,$$

代回得到

$$p_N = q_f, \quad p_k = q + \frac{a^2rp_{k+1}}{r + p_{k+1}}, \quad V_k(x) = p_kx^2.$$

现在研究映射

$$T(p) = q + \frac{a^2rp}{r + p}, \quad p \geq 0.$$

它严格递增。fixed-point equation 等价于

$$p^2 + [r(1 - a^2) - q]p - qr = 0.$$

两根乘积为 $-qr < 0$, 故恰有一个正根

$$p_+ = \frac{q + (a^2 - 1)r + \sqrt{[r(1 - a^2) - q]^2 + 4qr}}{2}.$$

若 $0 \leq p < p_+$, 则 $p < T(p) < p_+$; 若 $p > p_+$, 则 $p_+ < T(p) < p$ 。因此从任意 $q_f \geq 0$ 出发, $T^N(q_f)$ 单调趋于同一个 p_+ 。这正是 remaining horizon 增大时初始 value coefficient 的极限。

极限反馈为

$$u = -\frac{ap_+}{r + p_+}x,$$

故 closed-loop multiplier 是

$$a_{cl} = \frac{ar}{r + p_+}.$$

由 fixed-point equation,

$$p_+ - q = \frac{a^2rp_+}{r + p_+}.$$

当 $a \neq 0$ 时,

$$|a_{cl}|^2 = \frac{r(p_+ - q)}{p_+(r + p_+)} < \frac{r}{r + p_+} < 1;$$

当 $a = 0$ 时显然 $a_{cl} = 0$ 。所以 limiting closed-loop system $x_{k+1} = a_{cl}x_k$ asymptotically stable。

评分要点 (20 分) Bellman recursion 与二次型归纳 5 分; feedback 和 Riccati recursion 5 分; 正 fixed point 及任意终端系数的收敛 6 分; closed-loop stability 4 分。