

计算与应用数学博士资格考试 考前速查速记表

官方大纲定范围 | 六套真题定权重 | 复习讲义补模板

拿到题后的 30 秒识别流程

0-5 秒：贴标签。多项式/节点/求积；根/迭代；矩阵/谱/最小二乘；时间步进；PDE 网格；小参数；凸/对偶。**5-10 秒：圈条件。**简单根？SPD？满秩？周期/Cauchy/边界？光滑性？闭凸？Slater？**10-20 秒：写母公式。**误差方程、残差正交、放大因子、能量恒等式、匹配式、KKT。**20-30 秒：写结论的参数范围。**收敛阶、 $|G| \leq 1$ 、root condition、 $0 \leq \nu \leq 1$ 、 $r \leq 1/2$ 、强对偶条件。

题面关键词 → 第一反应

零点/正交多项式 插值节点、Gauss 求积、三项递推
 $\min \|Ax - b\|_2$ 满秩用 QR；秩亏/最小范数用 SVD
大稀疏 SPD CG/PCG；先写 $A = A^T \succ 0$
一般大稀疏 Arnoldi → GMRES
格式稳定性 先定问题类型与边界，再 Fourier/能量
 $0 < \varepsilon \ll 1$ 降阶？边界层；长期？多尺度/PL
 ℓ_1 /不可微 次梯度、prox、软阈值、对偶范数
polar/dual 先核对 ≤ 0 还是 ≥ 0 的符号约定

先写条件，再写结论

- Newton 二次：简单根， f' 局部 Lipschitz（常用 $f \in C^2$ ）。
- CG：A 必须 Hermitian/SPD；不定对称用 MINRES。
- $\sigma_i(A) = |\lambda_i(A)|$ ：只对 normal 矩阵可按谱匹配。
- Lax 等价：线性、适定 IVP、相容离散、固定有限时间。
- von Neumann：周期/Cauchy、常系数时最直接；边界另证。
- KKT 必要性需约束资格；凸问题加 Slater 常得强对偶。

五个万能起手式

$$\begin{aligned} e_{k+1} &= \Phi(x^* + e_k) - x^*, \\ r &= b - Ax, \quad A^T r = 0 \text{ (LS)}, \\ U_j^n &= G(\theta)^n e^{ij\theta}, \\ a(u - u_h, v_h) &= 0, \\ 0 &\in \partial f(x^*) + N_C(x^*). \end{aligned}$$

最后 10 秒自检

有没有把 LTE 当 global error？有没有把 $\rho(A)$ 当 $\|A\|$ ？稳定区是否写参数范围？边界是否被 Fourier 偷掉？投影是否误写成正交等式？结论的光滑/秩/凸性条件是否遗漏？

真题权重速记

PDE 每套出现且常占两题；线性代数与逼近/求积几乎每套出现；非线性迭代高频；ODE 较集中；渐近与优化通常二选一。先抢可模板化的 10-20 分题。

1. 插值、逼近、正交多项式、Gauss 求积

插值与余项

【看到】互异节点 $x_0, \dots, x_n$ ，求 p_n 或误差。
 【想到】Lagrange 基：先写节点多项式 ω_{n+1} 。
 【写】

$$\ell_j(x) = \prod_{k \neq j} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}, \quad p_n = \sum_{j=0}^n f(x_j) \ell_j(x),$$

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x).$$

【做】(1) 确认 $f \in C^{n+1}$ ；(2) 识别 ω ；(3) 估 $\|\omega\|$ ；(4) 乘导数界。
 【错】 ξ_x 随 x 变；Lagrange 余项不能直接用 $\|f^{(n+1)}\|_2$ 替代点值上界。

Chebyshev 母题

【看到】 T_n 、极值/零点、最大范数、离散正交。
 【想到】令 $x = \cos \theta$ ，把多项式变成余弦。
 【写】

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \cos(n \arccos x), \\ T_{n+1} &= 2xT_n - T_{n-1}, \quad \text{lc}(T_n) = 2^{n-1}, \\ x_j^G &= \cos \frac{(2j+1)\pi}{2(n+1)}, \quad x_j^L = \cos \frac{j\pi}{n}, \\ T_m(T_r(x)) &= T_{mr}(x). \end{aligned}$$

【做】极小极大：缩放 $2^{1-n}T_n$ 为首一；在 $n+1$ 个交错极值点比较；差多项式至少 n 个零点但次数 $\leq n-1$ ，矛盾。
 【错】标准极小极大约束是“首一 n 次”，不是仅 $p(1) = 1$ 。

Chebyshev 零点插值

$$\omega_{n+1}(x) = 2^{-n} T_{n+1}(x), \quad \|f - p_n\|_\infty \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{2^n (n+1)!}.$$

离散正交 ($x_j = \cos \frac{(2j-1)\pi}{2n}$):

$$\sum_{j=1}^n T_k(x_j) T_\ell(x_j) = \begin{cases} n, & k = \ell = 0, \\ n/2, & k = \ell \geq 1, \\ 0, & k \neq \ell. \end{cases}$$

谱微分矩阵

【看到】“由节点值求导数值” “Chebyshev differentiation matrix”。

【想到】 $p' = \sum_j p(x_j) \ell'_j$ ，故 $D_{ij} = \ell'_j(x_i)$ 。

【写】对 $x_j = \cos(j\pi/n)$ ， $c_0 = c_n = 2, c_j = 1$ ：

$$D_{ij} = \frac{c_i}{c_j} \frac{(-1)^{i+j}}{x_i - x_j} \quad (i \neq j),$$

$$D_{ii} = -\frac{x_i}{2(1-x_i^2)} \quad (1 \leq i \leq n-1),$$

$$D_{00} = \frac{2n^2+1}{6}, \quad D_{nn} = -D_{00}.$$

【做】先证一般 D_{ij} ；再由重心权重求非对角；最后用行和为零 $D\mathbf{1} = 0$ 求对角。

【错】节点次序反转会改变符号；端点不能代入内部对角公式。

正交多项式与最佳 L^2 逼近

【看到】三项递推、monic、 $\min \|p\|_2$ 、正交投影。

【想到】任意首一 $p_n = \pi_n + q_{n-1}$ ；Pythagoras。

【写】

$$\langle \pi_n, q \rangle_w = 0 \quad (q \in \mathbb{P}_{n-1}) \Rightarrow \|\pi_n\|_w^2 = \|\pi_n\|_w^2 + \|q\|_w^2.$$

标准 Legendre $L_n(1) = 1$ ，首项 $a_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$ ；首一 $P_n = L_n/a_n$ ：

$$\langle P_n, P_m \rangle = \frac{2}{(2n+1)a_n^2} \delta_{nm}.$$

【错】“正交”必须说明权函数与区间；首一和标准归一化不能混用。

材料核对提醒

2026 春 Q2(c) 给出的 L^2 插值误差常数按字面不成立。取 $f = P_{n+1}$ （节点多项式）即得反例。考试中可先写反例，再给安全修正：用 $\|f^{(n+1)}\|_\infty \|P_{n+1}\|_2 / (n+1)!$ 。

1. 插值与求积（续）

Gauss 求积统一模板

【看到】 N 点最高代数精度、正交多项式零点、求权重/误差。

【想到】节点取 N 次正交多项式 π_N 的零点；精度 $2N-1$ 。

【写】

$$Q_N(f) = \sum_{i=1}^N w_i f(x_i), \quad w_i = \int_a^b \ell_i(x) w(x) dx > 0.$$

【做】(1) 对 $p \in \mathbb{P}_{2N-1}$ 除法 $p = q\pi_N + r$ ；(2) $\deg q, r \leq N-1$ ；(3) 正交使 $\int q\pi_N w = 0$ ；(4) 插值使 $Q_N(q\pi_N) = 0, Q_N(r) = \int r w$ 。

【写】若 π_N 首一且 $f \in C^{2N}$ ：

$$I(f) - Q_N(f) = \frac{f^{(2N)}(\xi)}{(2N)!} \int_a^b \pi_N(x)^2 w(x) dx.$$

【错】 N 点 Gauss 精度是 $2N-1$ ，误差导数阶是 $2N$ ；权函数必须带进正交与误差积分。

Gauss-Legendre ($[-1, 1], w = 1$)

$$x_i : L_N(x_i) = 0, \quad w_i = \frac{2}{(1 - x_i^2)[L'_N(x_i)]^2},$$

$$E_N(f) = \frac{2^{2N+1}(N!)^4}{(2N+1)[(2N)!]^3} f^{(2N)}(\xi).$$

Gauss-Chebyshev ($w = (1 - x^2)^{-1/2}$)

$$x_j = \cos \frac{(2j-1)\pi}{2N}, \quad w_j = \frac{\pi}{N},$$

$$|E_N(f)| \leq \frac{\pi \|f^{(2N)}\|_\infty}{2^{2N-1}(2N)!}.$$

周期复合梯形公式

【看到】 2π 周期、 C^m /analytic、超代数或指数收敛。

【想到】Fourier 混叠；等距求和只留下 $k \equiv 0 \pmod{n}$ 。

【写】 $h = 2\pi/n$ ：

$$I_h = h \sum_{j=0}^{n-1} f(jh), \quad I - I_h = -2\pi \sum_{\ell \neq 0} \hat{f}_{\ell n}.$$

【做】 $f \in C^m$ ：分部积分 m 次， $|\hat{f}_k| \lesssim |k|^{-m}$ ，得 $O(h^m)$ （端点导数周期匹配）。解析于条带 $|\Im z| < a$ ： $|\hat{f}_k| \lesssim e^{-a|k|}$ ，得 $O(e^{-an}) = O(e^{-2\pi a/h})$ 。

【错】只说“梯形二阶”会丢掉周期题核心；解析必须说明无奇点条带宽度。

最小二乘逼近

【看到】 $\min \|f - p\|_{L^2}$ 或离散拟合。

【想到】正交投影；基不正交时 Gram 方程。

【写】

$$G_{ij} = \langle \phi_i, \phi_j \rangle, \quad b_i = \langle \phi_i, f \rangle, \quad Ga = b.$$

【做】证明：残差 $r = f - p^*$ 与子空间正交； $\|r - v\|^2 = \|r\|^2 + \|v\|^2$ 。

【错】最佳平方逼近不是逐点插值；单项式 Gram 矩阵常为 Hilbert 型病态。

题面识别：节点怎么选

最小 $\ \omega\ _\infty$	Chebyshev 零点
含端点配点	Chebyshev-Lobatto 极值点
$\int fw$ 最高精度	对 w 的正交多项式零点
周期光滑	等距节点、FFT、周期梯形
秩亏拟合	SVD/伪逆，不用法方程

材料核对提醒

2025 秋 Q2(a) 把 $|x| > 1$ 统一写成 $\cosh(n \operatorname{arccosh} x)$ ；在实数范围 $x < -1$ 应写 $(-1)^n \cosh(n \operatorname{arccosh}(-x))$ 。同题 $p(1) = 1$ 的极小值确为 1，但极小者不唯一， $p \equiv 1$ 也达到。

2. 非线性方程：fixed point、Newton、secant、Steffensen、Broyden

收敛阶统一展开

【看到】“估计收敛阶/渐近常数”。

【想到】令 $e_k = x_k - x^*$ ，在 x^* 展开迭代函数。

【写】

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = C \in (0, \infty) \Rightarrow p \text{ 阶}.$$

若 $x_{k+1} = \phi(x_k)$ 且 $\phi^{(1)} = \dots = \phi^{(p-1)} = 0$ 、 $\phi^{(p)} \neq 0$ 于 x^* ，则

$$e_{k+1} = \frac{\phi^{(p)}(x^*)}{p!} e_k^p + o(e_k^p).$$

【错】先证明迭代留在邻域并收敛，再取极限；只做形式展开不够。

不动点与压缩

【看到】 $x = \phi(x)$ 、任意初值、区间不变。

【想到】先证 $\phi(D) \subset D$ ，再证 $\sup_D |\phi'| = q < 1$ 。

【写】

$$|x_k - x^*| \leq q^k |x_0 - x^*|, \quad q_{quad} |x_k - x^*| \leq \frac{q}{1-q} |x_k - x_{k-1}|.$$

【做】存在唯一性、全局收敛、误差证书一次完成。Kepler: $\phi(x) = \epsilon \sin x + \eta$ ， $|\epsilon| < 1$ 。

【错】 $|\phi'(x^*)| < 1$ 只给局部结论；要“任意初值”需全局不变域/压缩。

Newton 误差展开与证明骨架

【看到】简单根、二次收敛、极限常数。

【想到】Taylor 展开 $f(x_k)$ 与 $f'(x_k)$ 。

【写】

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad e_{k+1} = \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)} e_k^2 + o(e_k^2).$$

【做】(1) 选邻域使 $|f'| \geq m > 0$ ；(2) Taylor 得 $|e_{k+1}| \leq C|e_k|^2$ ；(3) 缩小邻域使 $C|e_0| < 1$ ，归纳留域；(4) 收敛后取极限。

【错】简单根是关键；分母不能未经说明地“约掉”。

割线法

【看到】导数不可得、两点差商。

【写】

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})},$$

$$e_{k+1} = \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)} e_k e_{k-1} + o(e_k e_{k-1}).$$

【想到】若 $|e_k| \asymp |e_{k-1}|^p$ ，则 $p^2 = p + 1$ ， $p = (1 + \sqrt{5})/2$ 。

【错】需要两个初值；分母小会失稳；割线不是二次收敛。

重根与未知重数

【看到】 $f = (x - x^*)^m g(x)$ 。

【写】普通 Newton：

$$e_{k+1} = \left(1 - \frac{1}{m}\right) e_k + O(e_k^2).$$

已知 m ： $x_{k+1} = x_k - mf/f'$ ，恢复二次。未知 m ：对

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} \quad (\text{对 } u \text{ 用 Newton}),$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{ff'}{(f')^2 - ff''}.$$

简单条件下二次/超线性。

【错】2025 春题仅给 C^1 不足以保证简单根 Newton 二次；需 f' 局部 Lipschitz（如 C^2 ）。

Steffensen 与自适应差分 Newton

【看到】 $f(x + f(x)) - f(x)$ 。

【想到】用前向差分近似 $f'(x)$ ，但步长随残差趋零。

【写】

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)^2}{f(x_k + f(x_k)) - f(x_k)}.$$

【做】令 $e = x - x^*$ ；分别展开 $f(x)$ 、 $f(x + f(x))$ 到二阶；分母首项为 $[f'(x^*)]^2 e$ ；得 $e_+ = O(e^2)$ 。

【错】固定差分步长通常只有线性收敛或误差平台；这里二次来自步长 $f(x_k) \rightarrow 0$ 。

向量 Newton 与 Broyden

【看到】 $F(x) = 0$ 、Jacobian 昂贵。

【写】Newton: $J_k s_k = -F_k, x_{k+1} = x_k + s_k$ 。

Broyden (Jacobian 近似)：

$$B_{k+1} = B_k + \frac{(y_k - B_k s_k) s_k^T}{s_k^T s_k}, \quad y_k = F_{k+1} - F_k.$$

【做】检查割线条件 $B_{k+1} s_k = y_k$ ；更新是满足条件的最小 Frobenius 改动。

【错】不显式求 J^{-1} ；停止看 $\|F_k\|$ 与步长，不能只看其中一个。

3. 数值线性代数：QR/SVD、低秩、SMW、条件数

最小二乘：QR 起手

【看到】 $\min_x \|Ax - b\|_2, A \in \mathbb{R}^{m \times n}, m \geq n$ 。

【想到】满列秩用薄 QR；秩亏用 SVD。

【写】

$$A = QR, \quad Q^T Q = I, \quad Rx = Q^T b,$$

$$A^T(Ax - b) = 0, \quad r = b - Ax \perp \operatorname{range}(A).$$

【做】Householder QR；解上三角；残差 $\|(I - QQ^T)b\|$ 。

【错】

$$\kappa_2(A^T A) = \kappa_2(A)^2.$$

法方程虽 SPD，但会平方条件数。

SVD 与伪逆

【看到】秩亏、最小范数、条件数、四个子空间。

【写】

$$A = U \Sigma V^*, \quad A^\dagger = V \Sigma^\dagger U^*, \quad x^\dagger = A^\dagger b.$$

$$\|A\|_2 = \sigma_1, \quad \|A\|_F^2 = \sum_i \sigma_i^2, \quad \kappa_2(A) = \sigma_1/\sigma_r.$$

【做】将 b 分解到左奇异向量；非零 σ_i 分量除以 σ_i ；零空间分量取 0 得最小范数。

【错】一般矩阵 $\sigma_i(A) \neq |\lambda_i(A)|$ ；只有 normal 矩阵才可按模对应。矩形矩阵谈特征值更无意义。

最佳低秩逼近

【看到】 $\text{rank } X \leq k$ ，谱范数或 Frobenius 范数。

【想到】截断 SVD: $A_k = U_k \Sigma_k V_k^*$ 。

【写】

$$\min_{\text{rank } X \leq k} \|A - X\|_2 = \sigma_{k+1},$$

$$\min_{\text{rank } X \leq k} \|A - X\|_F = \left(\sum_{j>k} \sigma_j^2 \right)^{1/2}.$$

【做】下界：任意 k 维近似必漏掉一个前 $k+1$ 右奇异方向；上界：直接代 A_k 。

【错】唯一性通常需谱隙 $\sigma_k > \sigma_{k+1}$ ；两种范数误差公式不同。

Sherman-Morrison-Woodbury

【看到】 $A + uv^T$ 、 $A + UCV^T$ 、低秩核。

【写】

$$(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1}u},$$

$$S = C^{-1} + V^T A^{-1} U,$$

$$(A + UCV^T)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}US^{-1}V^T A^{-1}.$$

$$\det(A + UV^T) = \det(A) \det(I + V^T A^{-1} U).$$

条件：A, C 可逆且小矩阵可逆。

【做】实现用“解 $Ay = b, AY = U$ ”，不要显式形成 A^{-1} 。

【错】小分母表示更新后矩阵近奇异。

余弦核的秩二识别

$$\cos(t_j - s_k) = \cos t_j \cos s_k + \sin t_j \sin s_k.$$

故 $A = 4nI + UV^T$, $U, V \in \mathbb{R}^{n \times 2}$; $Ab, A^{-1}b$ 、行列式均可 $O(n)$ (固定秩)。

材料核对提醒

2025 春 Q3 要求在 $O(n)$ 内“计算 A^{-1} ”。逐项输出一个稠密 $n \times n$ 逆矩阵至少需 $\Omega(n^2)$ ；合理含义应是给出低秩隐式表示，或在 $O(n)$ 内计算 $A^{-1}b$ 。

矩阵方程最小二乘

【看到】 $\min_X \|AXB - C\|_F$ 。

【想到】向量化或左右正交投影。

【写】

$$\text{vec}(AXB) = (B^T \otimes A) \text{vec } X,$$

$$A^T(AXB - C)B^T = 0.$$

若 A 满列秩、 B 满行秩：

$$(A^T A)X(BB^T) = A^T C B^T, \quad X^* = A^\dagger C B^\dagger.$$

【错】唯一性需 A 满列秩且 B 满行秩；Frobenius 最优不自动推出谱范数最优。

3. 线性代数：定常迭代、CG、Krylov、GMRES

定常迭代统一式

【看到】Jacobi/GS/SOR、矩阵分裂。

【写】若 $A = M - N$ ：

$$x^{k+1} = M^{-1}N x^k + M^{-1}b, \quad e^{k+1} = G e^k, \quad G = M^{-1}N.$$

【想到】对任意初值收敛 $\iff \rho(G) < 1$ 。

【错】 $\rho(G) \leq \|G\|$ ，但一般 $\rho(G) \neq \|G\|$ ； $\rho < 1$ 不等于某个指定范数立即小于 1。

Gauss-Seidel 收敛证明

【看到】 $A = D - L - U$ 。

【写】

$$(D - L)x^{k+1} = Ux^k + b, \quad G_{GS} = (D - L)^{-1}U.$$

严格行对角占优：取 $|v_i| = \|v\|_\infty$ 的首个最大分量，从 $Gv = \lambda v$ 的分量式估 $|\lambda| < 1$ 。

SPD：若 $Gv = \lambda v$ ，由 $(D - L)\lambda v = Uv$ 与 $A = A^T \succ 0$ 构造能量，推出 $|\lambda| < 1$ ；或用坐标下降使二次能量严格下降。

【错】“SPD $\Rightarrow$ 任意分裂都收敛”错误；结论针对 GS 的特定分裂。

CG 计算模板

【看到】大型 $Ax = b$, $A = A^T \succ 0$ 。

【写】

$$r_0 = b - Ax_0, \quad p_0 = r_0,$$

$$\alpha_k = \frac{r_k^T r_k}{p_k^T A p_k}, \quad x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k,$$

$$r_{k+1} = r_k - \alpha_k A p_k,$$

$$\beta_k = \frac{r_{k+1}^T r_{k+1}}{r_k^T r_k}, \quad p_{k+1} = r_{k+1} + \beta_k p_k.$$

【想到】 $x_k \in x_0 + \mathcal{K}_k(A, r_0)$ 且最小化 $\|x - x^*\|_A$ 。

【错】非 SPD 时分母可非正、最优性失效；残差小不保证病态问题前向误差小。

CG 多项式观点与证明骨架

【写】

$$e_k = p_k(A)e_0, \quad p_k \in \mathbb{P}_k, \quad p_k(0) = 1,$$

$$\|e_k\|_A \leq \min_{p(0)=1} \max_{\lambda \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]} |p(\lambda)| \|e_0\|_A.$$

取缩放 Chebyshev 多项式， $q = (\sqrt{\kappa} - 1)/(\sqrt{\kappa} + 1)$ ：

$$\|e_k\|_A \leq \frac{2q^k}{1 + q^{2k}} \|e_0\|_A \leq 2q^k \|e_0\|_A.$$

【做】(1) 谱分解；(2) 转为标量极小极大；(3) 将 $[a, b]$ 仿射到 $[-1, 1]$ ；(4) 用 $|T_k| \leq 1$ 。

【错】条件数聚类界可能比区间界更好；不要漏掉系数 2。

材料核对提醒

2024 秋 Q2(i) 印出的 CG 界少了系数： $q^k \|e_0\|_A$ 一般不成立。安全写法是 $2q^k/(1 + q^{2k})$ ，进而 $\leq 2q^k$ 。

Arnoldi / Lanczos

【看到】构造 Krylov 正交基。

【写】Arnoldi：

$$AV_k = V_{k+1} \bar{H}_k, \quad h_{ik} = v_i^* A v_k, \quad w = A v_k - \sum_{i=1}^k h_{ik} v_i.$$

Lanczos：若 $A = A^*$, $\bar{H}_k$ 三对角，得到三项递推。

【错】经典 Gram-Schmidt 易失正交；有限精度 Lanczos 可能出现重复 Ritz 值，需重正交策略。

GMRES

【看到】一般非 Hermitian 大稀疏矩阵。

【想到】Arnoldi + 小型最小二乘。

【写】

$$x_k = x_0 + V_k y_k, \quad y_k = \arg \min_y \|\beta e_1 - \bar{H}_k y\|_2,$$

$$\|r_k\|_2 = \min_{x \in x_0 + \mathcal{K}_k} \|b - Ax\|_2, \quad r_k \perp A \mathcal{K}_k.$$

【做】Givens 逐列更新 QR 与残差；GMRES(m) 重启控制存储。

【错】重启会停滞；左预处理最小化的是预处理残差，最终需重算真实残差。

3. 线性代数：QR eigenvalue、QZ、矩阵迭代

位移 QR 特征值算法

【看到】 $H_k - \mu_k I = Q_k R_k$, $H_{k+1} = R_k Q_k + \mu_k I$ 。

【写】

$$H_{k+1} = Q_k^* H_k Q_k,$$

故特征值不变。先 Householder 化 Hessenberg：稠密一次 $O(n^3)$ ；每步 Hessenberg QR 为 $O(n^2)$ ，且结构保持。

【做】消去：若 $|h_{i+1,i}| \leq \text{tol}(|h_{ii}| + |h_{i+1,i+1}|)$ ，置零并分块。

【错】直接对稠密 A 每步 QR 是 $O(n^3)$ ；Hessenberg 不是上三角。

材料核对提醒

2023 秋 Q2(3) 仅假设 A 有互异特征值，不能推出所有 H_k 均为 unreduced Hessenberg；对角矩阵就是反例。需补充 H_0 unreduced (等价于相应循环/Krylov 条件) 且位移不触发分裂。

广义特征值与 QZ

【看到】 $\mu Ax = \lambda Bx$ 、矩阵铅笔、 B 可能奇异。

【想到】不形成 B^{-1} ；做双边酉等价。

【写】

$$Q^* A Z = S, \quad Q^* B Z = T, \quad S, T \text{ 上三角}.$$

正则铅笔从对角读取:

$$\mu_i s_{ii} - \lambda_i t_{ii} = 0, \quad (\lambda_i, \mu_i) \propto (s_{ii}, t_{ii}).$$

【做】预处理为 Hessenberg-triangular 对, 再 QZ 追赶 bulge. $t_{ii} = 0, s_{ii} \neq 0$ 对应无穷特征值。

【错】 $(s_{ii}, t_{ii}) = (0, 0)$ 表示奇异铅笔, 不能当普通 0/0 特征值; 左右变换必须成对累积。

Newton-Schulz 矩阵求逆

【看到】 $X_{k+1} = 2X_k - X_k A X_k$.

【想到】误差矩阵直接平方。

【写】令 $E_k = I - A X_k$:

$$E_{k+1} = I - A(2X_k - X_k A X_k) = E_k^2.$$

若 $\|E_0\| < 1$, 则 $\|E_k\| \leq \|E_0\|^{2^k} \rightarrow 0$, $A X_k \rightarrow I$, 故 A 非奇异且 $X_k \rightarrow A^{-1}$.

【做】若 A 非奇异, 可取 $X_0 = \alpha A^T$, $0 < \alpha < 2/\|A\|_2^2$, 则奇异值给 $\|I - A X_0\|_2 < 1$.

【错】左误差 $I - A X$ 与右误差 $I - X A$ 不要混写; 所用范数需次乘性。

SPD 证明模板

【看到】Hilbert/Gram/离散椭圆矩阵 “证明正定”。

【想到】把 $x^T A x$ 写成平方或积分平方。

【写】

$$x^T H_n x = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n x_i x^{i-1} \right)^2 dx > 0 \quad (x \neq 0).$$

一般 Gram: $A_{ij} = \langle \phi_i, \phi_j \rangle$, 则 $c^* A c = \|\sum c_i \phi_i\|^2$; 严格 > 0 需 ϕ_i 线性无关。

【错】对称加正对角不等于 SPD; 必须对所有非零向量给严格正下界。

条件数、残差、后向误差

【写】 $Ax = b$, $r = b - A\hat{x}$:

$$\frac{\|x - \hat{x}\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|r\|}{\|b\|}, \quad \eta = \frac{\|r\|}{\|A\| \|\hat{x}\| + \|b\|}.$$

【想到】小残差是小后向误差; 前向误差还乘条件数。

【错】问题病态与算法不稳定是两件事; 稳定算法也无法消除数据条件数。

矩阵方法选择

满秩 LS: QR; 秩亏/低秩: SVD; 大稀疏 SPD: CG/PCG; Hermitian 不定: MINRES; 一般矩阵: GMRES; 全谱: Hessenberg+QR; 广义谱: QZ; 低秩更新: SMW。

4. ODE: RK、LMM、误差、zero/absolute/A/L stability

LTE 与 global error

【看到】“局部截断误差/收敛阶”。

【想到】把精确解代入一步格式; 再用稳定性累积。

【写】对 $u_{n+1} = u_n + h\Phi(t_n, u_n, h)$:

$$d_{n+1} = \frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{h} - \Phi(t_n, u(t_n), h).$$

$d_{n+1} = O(h^p)$ 对应一步缺陷 $O(h^{p+1})$, 稳定时 global $O(h^p)$.

【错】LTE $\neq$ global error; 相容性 $\neq$ 收敛性, 必须加稳定性。

Runge-Kutta 统一模板

【写】

$$Y_i = u_n + h \sum_j a_{ij} f(t_n + c_j h, Y_j),$$

$$u_{n+1} = u_n + h \sum_i b_i f(t_n + c_i h, Y_i).$$

基本阶条件:

$$\sum b_i = 1; \quad b^T c = \frac{1}{2}; \quad b^T c^2 = \frac{1}{3}, b^T A c = \frac{1}{6}.$$

测试方程 $y' = \lambda y, z = h\lambda$:

$$R(z) = 1 + z b^T (I - z A)^{-1} \mathbf{1}, \quad \mathcal{S} = \{z : |R(z)| \leq 1\}.$$

【错】显式 RK 的 R 是多项式, 不可能 A-stable。

2023 秋两阶段显式梯形/Heun

$$k_1 = f(t_n, u_n), \quad k_2 = f(t_n + h, u_n + h k_1),$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2), \quad R(z) = 1 + z + \frac{1}{2}z^2.$$

二阶: 绝对稳定域 $|1 + z + z^2/2| \leq 1$, 负实轴为 $-2 \leq z \leq 0$ 。

线性多步法 LMM

【看到】 $\sum_{j=0}^s \alpha_j u_{n+j} = h \sum_{j=0}^s \beta_j f_{n+j}$.

【写】

$$\rho(\zeta) = \sum \alpha_j \zeta^j, \quad \sigma(\zeta) = \sum \beta_j \zeta^j.$$

一致性 (至少一阶):

$$\rho(1) = 0, \quad \rho'(1) = \sigma(1).$$

zero-stability root condition: ρ 的根均 $|\zeta| \leq 1$, 单位圆上的根全为单根。

【做】收敛 $\iff$ consistency + zero-stability (固定区间、Lipschitz 等标准条件)。

【错】只验 $\rho(1) = 0$ 不够; 单位圆重根会产生多项式增长。

绝对稳定与边界轨迹

【看到】LMM stability region.

【写】测试方程给

$$\rho(\zeta) - z\sigma(\zeta) = 0.$$

对给定 z , 所有根 $|\zeta| \leq 1$, 单位圆根单重; 边界参数化

$$z(\theta) = \frac{\rho(e^{i\theta})}{\sigma(e^{i\theta})}.$$

【错】zero-stability 看 $z = 0$ 的 ρ ; absolute stability 看每个 z 的特征方程, 不能混用。

A-stable、L-stable、stiff

【写】

$$\text{A-stable: } \{\Re z \leq 0\} \subset \mathcal{S},$$

$$\text{L-stable: A-stable 且 } R(z) \rightarrow 0 \ (z \rightarrow -\infty).$$

后向 Euler: $R = (1-z)^{-1}$, L-stable; 梯形法: $R = (1+z/2)/(1-z/2)$, A-stable 但非 L-stable。

【想到】stiff: 稳定性而非精度迫使显式法取极小步长; 优先隐式 A/L 稳定法。

【错】A-stable $\neq$ L-stable; 梯形法对极硬模态 $R \rightarrow -1$, 会残留振荡。

zero-stability 证明骨架

把误差递推写成伴随一阶系统 $E_{n+1} = C E_n + \tau_n$. root condition $\Rightarrow \sup_n \|C^n\| \leq K$; Duhamel:

$$\|E_n\| \leq K \|E_0\| + K \sum_{j < n} \|\tau_j\|.$$

若单位圆有重根, Jordan 块使 $\|C^n\| \sim n^r$, 反例破坏稳定。

5. PDE: 统一分析、von Neumann、energy、Lax

格式分析四步法

【看到】“截断误差与稳定性”。

【做】(1) 明确 Cauchy/周期/初边值; (2) 精确解代入并 Taylor; (3) 选 Fourier、能量或最大值原理; (4) 写 τ, h 参数范围及 Lax 收敛结论。

【写】

$$\text{误差方程: } \mathcal{L}_h e = -\tau_h, \quad e|_{t=0, \partial\Omega} = \text{数据误差}.$$

【错】稳定必须在指定网格范数、固定 T 下常数与网格无关。

von Neumann 模板

【看到】常系数、均匀网格、周期/Cauchy。

【写】代入 $U_j^n = \hat{U}^n e^{ij\theta}$:

$$\hat{U}^{n+1} = G(\theta) \hat{U}^n, \quad \sup_{\theta, n, \tau \leq T} |G(\theta)|^n \leq C_T.$$

标量一步法常简化为 $|G(\theta)| \leq 1 + C\tau$. 系统格式需放大矩阵 $G(\theta)$ 幂一致有界。

【错】对非 normal 放大矩阵, $\rho(G) \leq 1$ 不足以保证 $\sup_n \|G^n\| < \infty$; 单位圆 Jordan 块会增长。

能量法模板

【看到】有边界、变系数、Fourier 不方便。

【想到】格式乘 $U^{n+1} + U^n$ 或适当差分, 网格求和; 用 summation by parts。

【写】

$$\langle D_+ u, v \rangle_h = -\langle u, D_- v \rangle_h + \text{boundary flux},$$

$$E^{n+1} - E^n + \tau D^{n+1/2} \leq \tau C E^{n+1/2} + \tau \|f\|^2.$$

再离散 Gronwall。

【错】边界通量不能直接删; 必须用周期、齐次边界或数值边界条件控制。

Lax 等价定理

【看到】“相容 + 稳定是否收敛”。
【写】对适定线性初值问题与相容线性差分格式：

$$\text{stability} \iff \text{convergence}.$$

证明方向：误差方程 $e^{n+1} = S_h e^n + \tau d^n$ ；稳定控制传播算子；相容使缺陷和趋零。反向用一致有界原理。

【错】Lax 不是任意非线性/边值问题的口号；先写线性、适定、同一网格范数与固定时间。

CFL / 数值依赖域

【看到】双曲方程、传播速度、显式模板。
【想到】必要条件：连续依赖域包含在数值依赖域极限中。
【写】对 $u_t + au_x = 0$ ，典型 Courant 数 $\nu = a\tau/h$ ；显式局部格式通常要求 $|\nu| \leq C$ 。
【错】CFL 通常是必要条件，不自动充分；具体稳定范围仍要 Fourier/能量计算。

边界问题的三条硬规则

(1) 内部 Fourier mode 不能代替边界稳定性；(2) 入流边界给数据，出流边界配数值闭合且做能量估计；(3) 高阶空间模板需要足够多的边界条件/ghost values，不能凭空补零。

截断误差写法

把格式统一除到与 PDE 同量纲，再 Taylor。若格式含平均项，注意可能出现 h^2/τ 或 τ^2/h^2 ；此时“一眼看二阶空间”可能错，必须写联合极限条件。

5. PDE: advection、diffusion、wave 与高频格式

一阶迎风与 Lax-Wendroff

【看到】 $u_t + au_x = 0$ ， $\nu = a\tau/h$ 。
【写】 $a > 0$ 显式迎风：

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \nu(U_j^n - U_{j-1}^n), \quad 0 \leq \nu \leq 1.$$

Lax-Wendroff:

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\nu}{2}(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) + \frac{\nu^2}{2}(U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n),$$

$$G = 1 - i\nu \sin \theta + \nu^2(\cos \theta - 1), \quad |\nu| \leq 1.$$

【错】 $a < 0$ 要反向迎风；Lax-Wendroff 二阶但会在间断附近振荡。

2026 春三个隐式对流格式

【看到】 $u_t + u_x = 0$ ， $\nu = \tau/h \geq 0$ 。
【写】

$$\begin{aligned} G_- &= [1 + \nu(1 - e^{-i\theta})]^{-1}, & \nu &\geq 0, \\ G_+ &= [1 + \nu(e^{i\theta} - 1)]^{-1}, & \nu &\geq 1, \\ G_0 &= [1 + i\nu \sin \theta]^{-1}, & \nu &\geq 0. \end{aligned}$$

依次对应后向、前向、中心空间差分； $\nu = 0$ 时第二式平凡稳定。【做】不能凭“隐式”就写无条件稳定；逐个算分母最小模。

【错】第二个反迎风隐式格式在 $0 < \nu < 1$ 不稳定。

热方程三件套

【看到】 $u_t = a^2 u_{xx}$ ， $r = a^2 \tau/h^2$ 。
【写】令 $s = \sin(\theta/2)$ ：

$$\begin{aligned} G_F &= 1 - 4rs^2, & 0 &\leq r \leq \frac{1}{2}, \\ G_{BE} &= (1 + 4rs^2)^{-1}, & r &\geq 0, \\ G_{CN} &= \frac{1 - 2rs^2}{1 + 2rs^2}, & r &\geq 0. \end{aligned}$$

BE 为强阻尼；CN 高频在 $r \rightarrow \infty$ 时趋于 -1 。【错】无条件稳定不等于无条件准确；CN 对极硬高频可能振荡。

Du Fort-Frankel (二维)

【看到】 $u_t = u_{xx} + u_{yy}$ ，两时间层中心替换。
【写】 $r = \tau/h^2$ ：

$$\begin{aligned} S_{ij}^n &= U_{i+1,j}^n + U_{i-1,j}^n + U_{i,j+1}^n + U_{i,j-1}^n, \\ (1 + 4r)U_{ij}^{n+1} &= (1 - 4r)U_{ij}^{n-1} + 2rS_{ij}^n. \end{aligned}$$

Fourier 二步根均在单位圆内/上，形式上无条件稳定。

【错】相容误差含 $O(\tau^2/h^2)$ ；联合极限需 $\tau/h \rightarrow 0$ 。稳定而不相容仍不收敛。

波动方程模板

【看到】 $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ ，三层格式。

【写】标准 leapfrog:

$$\begin{aligned} U_j^{n+1} - 2U_j^n + U_j^{n-1} &= \lambda^2 \delta_{xx} U_j^n, \\ \delta_{xx} U_j^n &= U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n, \quad \lambda = c\tau/h. \end{aligned}$$

代 $U_j^n = \zeta^n e^{ij\theta}$ ：

$$\zeta^2 - 2[1 - 2\lambda^2 \sin^2(\theta/2)]\zeta + 1 = 0, \quad |\lambda| \leq 1.$$

【错】二步格式稳定要检查两根及单位圆重根；只算一个 G 不够。

2023 秋三阶色散 Lax 型

【看到】 $u_t + au_{xxx} = 0$ ，平均加中心三阶差分。
【写】令 $r = a\tau/h^3$ ：

$$G = \cos \theta + 4ir \sin \theta \sin^2(\theta/2), \quad |r| \leq \frac{1}{4}.$$

但截断误差含人工扩散项 $-\frac{h^2}{2\tau}u_{xx}$ ；相容要求 $h^2/\tau \rightarrow 0$ ，与 $\tau = O(h^3)$ 的稳定尺度冲突。

【错】不要只报稳定条件；该题核心是稳定与相容无法同时满足，故不能由 Lax 推出收敛。

5. PDE: maximum principle、FEM、Céa

二维中心差分最大值原理

【看到】 $u_{xx} + u_{yy} + du_x + eu_y + fu = 0$ ， $f < 0$ 。
【写】均匀网格：邻点系数

$$a_{x\pm} = h^{-2} \pm \frac{d}{2h}, \quad a_{y\pm} = h^{-2} \pm \frac{e}{2h}.$$

条件： $h|d| \leq 2, h|e| \leq 2, f \leq 0$ （严格结论常用 $f < 0$ ）。写成

$$(L_h U)_{ij} = \sum_{q \sim (i,j)} a_q (U_q - U_{ij}) + f_{ij} U_{ij}.$$

若 $L_h U \geq 0$ ，正的内部最大值处右端 < 0 ，矛盾，故

$$\max_{\Omega_h} U \leq \max\{0, \max_{\partial\Omega_h} U\}.$$

【错】不写邻点系数非负条件，maximum principle 不成立；符号方向必须与 L_h 定义一致。

离散最大值证明骨架

【做】(1) 假设正最大值在内部；(2) 邻点 $U_q - U_i \leq 0$ ；(3) 非负邻点系数使差分 ≤ 0 ；(4) 零阶项 $f_i U_i < 0$ ；(5) 与 $L_h U_i \geq 0$ 矛盾。稳定性：对误差 $L_h e = \tau$ 构造屏障 w 使 $L_h w \leq -1$ ；对 $e \pm \|\tau\|_\infty w$ 用最大值原理，得 $\|e\|_\infty \leq C\|\tau\|_\infty + \text{边界误差}$ 。

【错】“除非常数”需检查行和/零阶项是否允许常数解。

后向 Euler 抛物稳定

【看到】 $u_t - Lu = 0$ ，齐次 Dirichlet。
【写】

$$(I - \tau L_h)U^{n+1} = U^n.$$

若 L_h 满足上述最大值原理，则在 $|U^{n+1}|$ 最大点按符号应用离散原理，得

$$\|U^{n+1}\|_\infty \leq \|U^n\|_\infty,$$

进而无条件 ℓ_∞ 稳定。

【错】结论依赖空间离散的符号条件和边界；“后向 Euler”本身不修复坏的空间算子。

有限元四步

【看到】椭圆边值问题、Galerkin、误差估计。

【做】(1) 乘测试函数并分部积分；(2) 定义 V 、双线性型 $a(\cdot, \cdot)$ 与线性泛函 ℓ ；(3) 选 $V_h \subset V$ ；(4) 写 $a(u_h, v_h) = \ell(v_h)$ 。

【写】

$$a(u, v) = \ell(v) \quad \forall v \in V, \quad a(u_h, v_h) = \ell(v_h) \quad \forall v_h \in V_h.$$

【错】非齐次 Dirichlet 先 lifting；Neumann 边界是自然条件；网格基函数装配别漏 Jacobian。

Céa 证明模板

条件：连续性 $|a(w, v)| \leq M\|w\|_V\|v\|_V$ ；强制性 $a(v, v) \geq \alpha\|v\|_V^2$ ； $V_h \subset V$ 。

Galerkin 正交： $a(u - u_h, v_h) = 0$ 。对任意 $w_h \in V_h$ ：令 $e = u - u_h$ ，则

$$\begin{aligned} \alpha\|e\|_V^2 &\leq a(e, e) = a(e, u - w_h) \\ &\leq M\|e\|_V\|u - w_h\|_V. \end{aligned}$$

故

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{w_h \in V_h} \|u - w_h\|_V.$$

【错】不是自动等于最佳逼近；常数 M/α 与网格应无关。

FEM 误差到具体阶

若 P_1 单元、拟一致网格、 $u \in H^2$ ：

$$\inf_{v_h} \|u - v_h\|_{H^1} \leq Ch|u|_{H^2} \Rightarrow \|u - u_h\|_{H^1} \leq Ch|u|_{H^2}.$$

L^2 二阶需对偶问题 H^2 正则性 (Aubin-Nitsche)，不是 Céa 单独给出。

PDE 方法选择

周期/常系数：Fourier；有边界/变系数：能量；椭圆与 M -matrix；最大值原理；有限元：强制性 + Galerkin 正交 + Céa。所有结论都要带网格参数范围。

6. 渐近：scaling、boundary layer、matching、PL、multiple scales

主导平衡与 scaling

【看到】 $0 < \varepsilon \ll 1$ 、不同项竞争。

【做】(1) 设 $x = x_0 + \delta X$ 、 $y = AY$ ；(2) 每项写成 ε 幂；(3) 至少两项同阶；(4) 排除自相矛盾平衡；(5) 用边界/初值定 A, δ 。

【写】导数尺度 $d/dx = \delta^{-1}d/dX$ ， $d^2/dx^2 = \delta^{-2}d^2/dX^2$ 。

【错】先猜 $\delta = \varepsilon$ 容易错；由平衡算。 $\varepsilon y'' \sim y$ 给 $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ 。

边界层匹配模板

【看到】小参数乘最高阶导数，降阶后边界条件不够。

【做】(1) 令 $\varepsilon = 0$ 得 outer；(2) 找失配边界；(3) $x = x_b + \delta X$ ；(4) 内层主导方程；(5) matching；(6) composite。

【写】

$$\lim_{X \rightarrow \infty} y_{in}(X) = \lim_{x \rightarrow x_b} y_{out}(x) = y_{match},$$

$$y_{comp} = y_{out} + y_{in} - y_{match}.$$

【错】内变量方向要使区间内部对应 $X \rightarrow +\infty$ ；双边失配要两个边界层；复合式必须减重叠项。

2024 秋边界层识别

$$\varepsilon y'' + \varepsilon(1+x)^2 y' - y = x - 1.$$

Outer: $y_0 = 1 - x$ 。因 $\varepsilon y'' \sim y$ ，层宽 $\sqrt{\varepsilon}$ 。 $\alpha = 1$ 时左端匹配、右端失配； $\alpha = 0$ 时两端均失配。领先层解为指数衰减，误差阶必须结合下一阶与残量说明。

特征值正则摄动

【看到】 $u'' + (\lambda + \varepsilon f)u = 0$ ，混合边界。

【想到】写成自伴算子 $(-d^2/dx^2 - \varepsilon f)u = \lambda u$ 。

【写】

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \cdots, \quad u = u_0 + \varepsilon u_1 + \cdots,$$

$$\lambda_{0,k} = ((k + \frac{1}{2})\pi)^2, \quad u_{0,k} = \sin((k + \frac{1}{2})\pi x),$$

$$\lambda_{1,k} = -\frac{\int_0^1 f(x)u_{0,k}(x)^2 dx}{\int_0^1 u_{0,k}(x)^2 dx}.$$

【做】一阶方程与 u_0 内积；分部积分，用自伴性和边界条件消去 u_1 。

【错】符号来自算子中的 $-\varepsilon f$ ；别凭记忆写反。

Poincaré-Lindstedt

【看到】保守弱非线性振子、周期/频率修正、secular term。

【写】令 $\tau = \omega t$ ：

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \cdots, \quad y = y_0 + \varepsilon y_1 + \cdots.$$

【做】逐阶解线性振子；把右端投影到 $\cos \tau, \sin \tau$ ；令共振系数为 0，解 ω_j ；周期 $T = 2\pi/\omega$ 。

【错】只消 $t \sin t$ 而不修正时间尺度，长期相位仍失效；初值也要逐阶展开。

multiple scales

【看到】弱阻尼/激励、 $t = O(\varepsilon^{-1})$ 、振幅慢变。

【写】 $T_0 = t, T_1 = \varepsilon t$ ：

$$D_t = D_0 + \varepsilon D_1 + \cdots, \quad D_t^2 = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \cdots,$$

$$y_0 = A(T_1)e^{iT_0} + \bar{A}(T_1)e^{-iT_0}.$$

【做】 $O(\varepsilon)$ 方程中令 $e^{\pm iT_0}$ 共振系数为 0，得到振幅/相位慢流；求慢流定点与稳定性；重构 y 。

【错】固定 $t = O(1)$ 的误差不能证明长期有效；应说明 $T_1 = O(1)$ 即 $t = O(\varepsilon^{-1})$ 。

stationary phase

【看到】 $I(k) = \int a(x)e^{ik\phi(x)}dx, k \rightarrow \infty$ 。

若内部非退化驻点 $\phi'(x_0) = 0, \phi''(x_0) \neq 0$ ：

$$I(k) \sim a(x_0)e^{ik\phi(x_0) + i\frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} \phi''(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{k|\phi''(x_0)|}}.$$

无驻点：分部积分，主贡献通常来自端点， $O(k^{-1})$ 。

【错】多驻点贡献要相加；驻点在端点或退化时公式改变。

7. 优化：convexity、subgradient、projection、polar、LP

凸、严格凸、强凸

【写】可微凸：

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x).$$

μ -强凸：右端再加 $\frac{\mu}{2}\|y - x\|^2$ ；若 $C^2, \nabla^2 f \succeq \mu I$ 。

【做】次水平集 $\{f \leq c\}$ ：凸性由 Jensen；闭性由连续性/lsc；有界性需强凸或 coercive，不能自动得。

【错】严格凸只保证最优点至多一个，不保证存在；Hessian 半正定是凸，不是强凸。

次梯度

【看到】 $|x|$ 、范数、max、不可微。

【写】

$$g \in \partial f(x) \iff f(y) \geq f(x) + g^T(y - x) \quad \forall y.$$

$$\partial|x| = \begin{cases} \{1\}, & x > 0, \\ [-1, 1], & x = 0, \\ \{-1\}, & x < 0, \end{cases}$$

$$\partial\|x\|_1 = \{g : g_i = \operatorname{sgn} x_i \ (x_i \neq 0), |g_i| \leq 1 \ (x_i = 0)\}.$$

【错】 $\partial|0| = [-1, 1]$ ，不是 $\{0\}$ ；最优性写 $0 \in \partial f(x^*)$ 。

Euclidean projection

【看到】 $P_C(z) = \arg \min_{x \in C} \frac{1}{2}\|x - z\|^2$ 。

条件： C 非空闭凸；存在唯一。

【写】

$$p = P_C(z) \iff \langle z - p, x - p \rangle \leq 0 \quad \forall x \in C.$$

$$\|P_C z - P_C w\|^2 \leq \langle P_C z - P_C w, z - w \rangle.$$

平方距离 $\Theta(z) = \frac{1}{2} \operatorname{dist}(z, C)^2$ ：

$$\nabla \Theta(z) = z - P_C(z), \quad \nabla \Theta \text{ 为 } 1\text{-Lipschitz}.$$

【错】一般凸集投影是 inequality；只有线性/仿射子空间给正交等式。

polar、dual norm、bipolar

【写】

$$C^\circ = \{y : y^T x \leq 1 \ \forall x \in C\}$$

总是闭凸。若 K 是锥：

$$K^\circ = \{y : y^T x \leq 0 \ \forall x \in K\} = -K^*.$$

范数单位球 $B = \{x : \|x\| \leq 1\}$ ：

$$B^\circ = \{y : \|y\|_* \leq 1\}.$$

标准单纯形 $\Delta = \{x \geq 0, 1^T x = 1\}$ ：

$$\Delta^\circ = \{y : \max_i y_i \leq 1\}.$$

条件： C 闭凸且 $0 \in C$ ； $(C^\circ)^\circ = C$ 。

【错】cone polar 注意 ≤ 0 ；单纯形 polar 对负方向无界，不是 ℓ_∞ 球。

bipolar 证明骨架

(1) 定义直接得 $C \subset C^{\circ\circ}$ 。(2) 若 $z \notin C$ ，严格分离： $a^T x \leq b < a^T z$ 。由 $0 \in C$ 得 $b \geq 0$ 。(3) 若 $b > 0$ ，取 $y = a/b$ ；若 $b = 0$ ，取足够大的 $y = ta$ 。(4) 均有 $y \in C^\circ$ 且 $y^T z > 1$ ，故 $z \notin C^{\circ\circ}$ 。

【错】 $b = 0$ 时不能除以 b ；闭、凸、含 0 三条件都要用。

LP 原始-对偶模板

【看到】

$$\max c^T x \quad \text{s.t. } Ax = b, x \geq 0.$$

【写】

$$\min b^T y \quad \text{s.t. } A^T y \geq c, \quad y \text{ 自由}.$$

弱对偶： $c^T x \leq x^T A^T y = b^T y$ 。互补松弛：

$$x_i(A^T y - c)_i = 0.$$

BFS：选 m 个线性无关列 $B, x_B = B^{-1}b \geq 0, x_N = 0$ ；在满行秩标准型下，BFS $\iff$ 顶点。

【错】不等号方向与变量符号共同决定对偶；先统一标准型。

7. 优化 (续): KKT、 ℓ_1/prox 、对偶与证明模板

KKT 完整模板

【看到】 $\min f(x)$ s.t. $g_i(x) \leq 0, h_j(x) = 0$.

【写】 $L = f + \sum_i \lambda_i g_i + \sum_j \nu_j h_j$:

$$\begin{aligned}\nabla_x L(x^*, \lambda^*, \nu^*) &= 0, \\ g_i(x^*) &\leq 0, \quad h_j(x^*) = 0, \\ \lambda_i^* &\geq 0, \quad \lambda_i^* g_i(x^*) = 0.\end{aligned}$$

条件: 必要性需约束资格 (LICQ/MFCQ 等); 凸 f, g_i 、仿射 h_j 时 KKT 充分; Slater 常保证强对偶及乘子存在。

【错】KKT/strong duality 不写条件会失分; 符号约定变了, 乘子号也随之变。

soft threshold / prox

【看到】 $\frac{1}{2}\|x - y\|_2^2 + \lambda\|x\|_1$.

【想到】可分坐标, 写 $0 \in x - y + \lambda\partial|x|$.

【写】

$$[S_\lambda(y)]_i = \text{sgn}(y_i)(|y_i| - \lambda)_+, \quad \text{prox}_{\lambda\|\cdot\|_1} = S_\lambda.$$

【做】三段: $y_i > \lambda, |y_i| \leq \lambda, y_i < -\lambda$.

【错】soft threshold 会收缩大坐标; hard threshold 只删除小坐标, 两者不同。

近端梯度 / ISTA

【看到】 $F(x) = g(x) + \lambda\|x\|_1$, ∇g 为 L -Lipschitz.

【写】

$$x^{k+1} = \text{prox}_{\alpha\lambda\|\cdot\|_1}(x^k - \alpha\nabla g(x^k)) = S_{\alpha\lambda}(x^k - \alpha\nabla g(x^k)),$$

通常 $0 < \alpha \leq 1/L$. Lasso 若 $g = \frac{1}{2}\|Ax - b\|^2$, 则 $L = \|A\|_2^2$.

【错】阈值是 $\alpha\lambda$; 把 λ 直接当阈值会错尺度。

非平方残差 $+ \ell_1$ 的对偶

【看到】 $\min_x \|Ax - b\|_2 + \gamma\|x\|_1$.

令 $y = Ax - b$, 乘子 r 对 $Ax - b - y = 0$:

$$\max_r -b^T r \quad \text{s.t. } \|r\|_2 \leq 1, \|A^T r\|_\infty \leq \gamma.$$

若残差非零:

$$r = \frac{Ax^* - b}{\|Ax^* - b\|_2}, \quad A^T r \in -\gamma\partial\|x^*\|_1,$$

$$r^T Ax^* + \gamma\|x^*\|_1 = 0.$$

若 $\|a_i\|_2 < \gamma$, 则 $x_i^* = 0$ (否则 $|a_i^T r| = \gamma$, 与 Cauchy 矛盾)。

【错】非平方损失的对偶约束含 $\|r\|_2 \leq 1$; 不要套平方 Lasso 对偶。

LP 强对偶证明骨架

(1) 弱对偶给 $\text{primal} \leq \text{dual}$. (2) 用 Farkas/分离定理对“比最优值更好”的不可行系统构造证书。(3) 证书整理为对偶可行 y^* . (4) 目标值相等。有限维 LP 中, 若原问题有有限最优值, 则对偶也有最优解。

【错】“原可行”不等于“有有限最优值”; 还要排除无界。

强凸次水平集证明

【看到】 $\nabla^2 f \succeq mI$ 只在 $L(f(x_0))$ 内。

先证次水平集凸, 故 $[x_0, x] \subset L$. 沿线积分 Taylor:

$$f(x) \geq f(x_0) + \nabla f(x_0)^T(x - x_0) + \frac{m}{2}\|x - x_0\|^2.$$

又 $f(x) \leq f(x_0)$, 令 $r = \|x - x_0\|$:

$$\frac{m}{2}r^2 \leq \|\nabla f(x_0)\|r \Rightarrow r \leq \frac{2\|\nabla f(x_0)\|}{m}.$$

闭性由 S 闭与 f 连续, 凸性由 f, S 凸。

【错】不可擅自令 $\nabla f(x_0) = 0$; Hessian 条件只在水平集内, 所以先证线段留在其中。

优化必查五坑

$\partial|0| = [-1, 1]$; 投影一般是 ≤ 0 ; cone polar 是非正约束; soft $\neq$ hard; KKT/strong duality 必须写约束资格或凸性/Slater 条件。

全科终极公式速查 I: 逼近、求根、线代

逼近 / 求积

$$f - p_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (x - x_j),$$

$$T_n(\cos \theta) = \cos n\theta, \quad \text{lc}(T_n) = 2^{n-1},$$

$$\omega_{n+1}^{\text{Cheb}} = 2^{-n} T_{n+1},$$

$$D_{ij} = \ell'_j(x_i),$$

$$\langle P_n, P_m \rangle = 0 \quad (n \neq m),$$

$$Q_N(f) = \sum_{i=1}^N w_i f(x_i), \quad \deg_{\text{exact}} = 2N - 1,$$

$$E_N(f) = \frac{f^{(2N)}(\xi)}{(2N)!} \int \pi_N^2 w,$$

$$I - I_h = -2\pi \sum_{\ell \neq 0} \hat{f}_{\ell n} \quad (2\pi \text{ 周期}).$$

求根

$$x_{k+1}^N = x_k - \frac{f_k}{f'_k}, \quad e_{k+1} \sim \frac{f''_*}{2f'_*} e_k^2,$$

$$x_{k+1}^{\text{sec}} = x_k - f_k \frac{x_k - x_{k-1}}{f_k - f_{k-1}}, \quad e_{k+1} \sim \frac{f''_*}{2f'_*} e_k e_{k-1},$$

$$p_{\text{sec}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

$$x_{k+1}^{St} = x_k - \frac{f_k^2}{f(x_k + f_k) - f_k}, \quad e_{k+1} = O(e_k^2),$$

$$x_{k+1}^{mN} = x_k - m \frac{f_k}{f'_k}, \quad e_{k+1} = O(e_k^2),$$

$$B_{k+1} = B_k + \frac{(y_k - B_k s_k) s_k^T}{s_k^T s_k}.$$

QR / SVD / SMW

$$A = QR, \quad x_{LS} = R^{-1}Q^T b,$$

$$A = U\Sigma V^*, \quad A^\dagger = V\Sigma^\dagger U^*,$$

$$A_k = U_k \Sigma_k V_k^*, \quad \|A - A_k\|_2 = \sigma_{k+1},$$

$$\|A - A_k\|_F^2 = \sum_{j>k} \sigma_j^2,$$

$$w = A^{-1}u, \quad z = A^{-T}v,$$

$$s = 1 + v^T w,$$

$$(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - wz^T/s,$$

$$\det(A + uv^T) = \det(A)s,$$

$$\kappa_2(A^T A) = \kappa_2(A)^2.$$

Krylov / eigen

$$\mathcal{K}_k(A, r_0) = \text{span}\{r_0, Ar_0, \dots, A^{k-1}r_0\},$$

$$\|e_k^{CG}\|_A \leq \frac{2q^k}{1 + q^{2k}} \|e_0\|_A, \quad q = \frac{\sqrt{\kappa} - 1}{\sqrt{\kappa} + 1},$$

$$AV_k = V_{k+1} \bar{H}_k,$$

$$y_k^{GMRES} = \arg \min_y \|\beta e_1 - \bar{H}_k y\|_2,$$

$$H_k - \mu_k I = Q_k R_k, \quad H_{k+1} = R_k Q_k + \mu_k I,$$

$$Q^* A Z = S, \quad Q^* B Z = T,$$

$$E_{k+1}^{NS} = (E_k^{NS})^2, \quad E_k^{NS} = I - A X_k.$$

条件闪卡

CG: SPD; QR least squares: 满列秩; SVD: 秩亏安全; SMW: 小分母非零; QR eigen: 先 Hessenberg; QZ: 不形成 B^{-1} ; $\rho(A) \neq \|A\|$; $\sigma(A) \neq |\lambda(A)|$ (一般)。

全科终极公式速查 II：ODE、PDE

ODE
$R_{RK}(z) = 1 + zb^T(I - zA)^{-1}\mathbf{1},$ $\mathcal{S} = \{z : R(z) < 1\}.$ $\rho(\zeta) = \sum \alpha_j \zeta^j, \quad \sigma(\zeta) = \sum \beta_j \zeta^j,$ consistency: $\rho(1) = 0, \quad \rho'(1) = \sigma(1),$ zero-stability: $\zeta_i \leq 1, \quad \zeta_i = 1 \Rightarrow \text{单根},$ $z(\theta) = \rho(e^{i\theta})/\sigma(e^{i\theta}),$ $R_{BE}(z) = (1 - z)^{-1} \quad (\text{L-stable}),$ $R_{TR}(z) = (1 + z/2)/(1 - z/2) \quad (\text{A 非 L}).$
PDE Fourier
$U_j^n = \widehat{U}^n e^{ij\theta}, \quad \widehat{U}^{n+1} = G(\theta)\widehat{U}^n,$ $G_{up} = 1 - \nu(1 - e^{-i\theta}), \quad 0 \leq \nu \leq 1,$ $G_{LW} = 1 - i\nu \sin \theta + \nu^2(\cos \theta - 1), \quad \nu \leq 1,$ $G_{FTCS} = 1 - 4r \sin^2(\theta/2), \quad 0 \leq r \leq \frac{1}{2},$ $G_{BE} = [1 + 4r \sin^2(\theta/2)]^{-1}, \quad r \geq 0,$ $G_{CN} = \frac{1 - 2r \sin^2(\theta/2)}{1 + 2r \sin^2(\theta/2)}, \quad r \geq 0.$
隐式对流 / wave
$G_{bwd} = [1 + \nu(1 - e^{-i\theta})]^{-1}, \quad \nu \geq 0,$ $G_{fwd} = [1 + \nu(e^{i\theta} - 1)]^{-1}, \quad \nu \geq 1,$ $G_{ctr} = [1 + i\nu \sin \theta]^{-1}, \quad \nu \geq 0,$ $P(\zeta) = \zeta^2 - 2(1 - 2\lambda^2 s^2)\zeta + 1,$ $s = \sin(\theta/2), \quad \lambda \leq 1.$
maximum principle / FEM
$a_{x\pm} = h^{-2} \pm d/(2h) \geq 0,$ $a_{y\pm} = h^{-2} \pm e/(2h) \geq 0,$ $f \leq 0, \quad L_h U \geq 0$ $\Rightarrow \max U \leq \max\{0, \max_{\partial\Omega_h} U\},$ $a(u - u_h, v_h) = 0,$ $\ u - u_h\ _V \leq (M/\alpha) \inf_{v_h \in V_h} \ u - v_h\ _V.$

PDE/ODE 条件闪卡
LTE $\neq$ global; consistency $\neq$ convergence; A-stable $\neq$ L-stable; Lax 要线性适定 IVP; 系统 Fourier 要 G^n 有界; 边界问题另做能量/最大值; maximum principle 要邻点系数非负; 稳定范围必须写等号端点。

证明选择一眼决策
周期常数 $\rightarrow$ Fourier; 边界/变系数 $\rightarrow$ energy; 椭圆符号结构 $\rightarrow$ maximum principle; FEM $\rightarrow$ Galerkin orthogonality + Céa; LMM $\rightarrow$ root condition; RK $\rightarrow$ stability function。

全科终极公式速查 III：渐近、优化、材料提醒

渐近
$x = x_b + \delta X, \quad D_x = \delta^{-1} D_X,$ $y_{comp} = y_{out} + y_{in} - y_{match},$ $\lambda_1 = \frac{\langle u_0, L_1 u_0 \rangle}{\langle u_0, u_0 \rangle},$ $T_0 = t, \quad T_1 = \varepsilon t, \quad D_t = D_0 + \varepsilon D_1 + \cdots,$ $y_0 = A(T_1)e^{iT_0} + \overline{A}(T_1)e^{-iT_0},$ $I(k) \sim a(x_0)e^{ik\phi(x_0) + i\pi \operatorname{sgn}(\phi'')/4} \sqrt{\frac{2\pi}{k \phi''(x_0) }}.$ 顺序：主导平衡 $\rightarrow$ 外解 $\rightarrow$ 层位置/尺度 $\rightarrow$ 内解 $\rightarrow$ matching $\rightarrow$ composite $\rightarrow$ 残量与有效区间。

凸分析 / projection / polar
$g \in \partial f(x) \iff f(y) \geq f(x) + g^T(y - x),$ $\partial 0 = [-1, 1],$ $p = P_C(z) \iff \langle z - p, x - p \rangle \leq 0 \quad \forall x \in C,$ $\nabla_{\frac{1}{2}} d_C^2(z) = z - P_C(z),$ $C^\circ = \{y : y^T x \leq 1 \quad \forall x \in C\},$ $K^\circ = \{y : y^T x \leq 0 \quad \forall x \in K\},$ $B_{\ \cdot\ }^\circ = B_{\ \cdot\ _*},$ $C^{\circ\circ} = C \quad (C \text{ 闭凸且 } 0 \in C).$
KKT / prox / LP dual
$0 = \nabla f + \sum_i \lambda_i \nabla g_i + \sum_j \nu_j \nabla h_j,$ $g_i \leq 0, \quad h_j = 0, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \lambda_i g_i = 0,$ $S_\lambda(y) = \operatorname{sgn}(y)(y - \lambda)_+,$ $x^{k+1} = S_{\alpha\lambda}(x^k - \alpha \nabla g(x^k)),$ $P^* = \max\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\},$ $D^* = \min\{b^T y : A^T y \geq c\}, \quad P^* = D^*,$ $x_i(A^T y - c)_i = 0.$

材料核对提醒总表
• 2023 秋 Q2(3): 互异特征值不足以保证 unreduced Hessenberg。 • 2024 秋 Q2(i): CG 界系数 2 (精确 Chebyshev 因子为 $2q^k/(1 + q^{2k})$)。 • 2025 春 Q2(i): 仅 C^1 不足以推出 Newton 二次, 需 f' 局部 Lipschitz。 • 2025 春 Q3: 显式输出 A^{-1} 不可能 $O(n)$; 应理解为隐式低秩表示或求 $A^{-1}b$。 • 2025 秋 Q2(a): $x < -1$ 的实值 arcosh 表达需改写; Q2(b) 极小者不唯一。 • 2026 春 Q2(c): 所给 L^2 插值误差常数有反例, 不能按字面证明。

最后一分钟只背条件
简单根 $+C^2$; CG=SPD; normal 才能把奇异值与特征值模对应; LMM=root condition; A 不等于 L; PDE 稳定范围 + 边界; Céa=连续 + 强制; 投影 = 闭凸; KKT= 约束资格; 强对偶 = 凸性/Slater 或 LP 有限最优; bipolar= 闭凸含 0。