$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}$$

$$\sum_k \epsilon_{ijk}\epsilon_{kmn} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}$$

$$\sum_{j,k} \epsilon_{ijk}\epsilon_{mjk} = 2\delta_{im}, \quad \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 3! = 6$$

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$$

$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})$$

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A}$$

相对位置矢量 $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$ ： $R = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{R} = 3, \quad \nabla\times\boldsymbol{R} = 0$$

$$\nabla R = \frac{\boldsymbol{R}}{R} = \hat{R}, \quad \nabla\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{\hat{R}}{R^2}$$

$$\nabla\cdot\left(\frac{\hat{R}}{R^2}\right) = 4\pi\delta^3(\boldsymbol{R}) \implies \nabla^2\left(\frac{1}{R}\right) = -4\pi\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

静电力 $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$, 电场 $\boldsymbol{E} = -\nabla V$。

基本方程: $\nabla\times\boldsymbol{E} = 0 \implies \boldsymbol{E} = -\nabla V$.

高斯定律积分形式:

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{A} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}$$

泊松方程: $\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$. 拉普拉斯方程: $\nabla^2 V = 0$.

直接积分法 (库仑定律):

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}d\tau'$$

* **方形线圈** (边长 a，求 z 轴上的点):

$$V = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{\sqrt{z^2+a^2/2}+a/2}{\sqrt{z^2+a^2/2}-a/2}\right)$$

* **圆形线圈** (半径 r): $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{r^2+z^2}}$
* **扁平面圆盘** (半径 R): $V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}(\sqrt{R^2+z^2} - |z|)$

静电场能量:

$$W = \frac{1}{2}\int \rho V d\tau = \frac{\epsilon_0}{2}\int E^2 d\tau$$

位于接地平面上方 $z = d$ 处的点电荷 q:

* 镜像电荷: 位于 $z = -d$ 处的 $-q$。
* 受力: $\boldsymbol{F} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2d)^2}\hat{z}$
* 诱导表面电荷密度: $\sigma(x,y) = -\frac{qd}{2\pi(x^2+y^2+d^2)^{3/2}}$
* 系统总能量: $W = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 d}$ (真实电荷与镜像电荷系统能量的一半！)。

相交接地平面 (夹角 α): 需要的镜像电荷数量: $N = \frac{360^\circ}{\alpha} - 1$。

* 仅当 $180^\circ/\alpha \in \mathbb{Z}^+$ 时有效 (例如 $90^\circ, 60^\circ, 45^\circ$)。

静电学界面条件:

$$E_{out} - E_{in} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

当 $r \gg r'$ 时，通过泰勒级数展开 $\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$:

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^{n+1}}\int (r')^n P_n(\cos\theta')\rho(\boldsymbol{r}')d\tau'$$

球坐标系下具有方位角对称性（与 ϕ 无关）的拉普拉斯通解为:

$$V(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta)$$

$P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$, $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x)$。

单极子 (Monopole): $V_{mon} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ (其中 $Q = \int\rho d\tau'$)

偶极矩 (Dipole Moment): $\boldsymbol{p} = \int \boldsymbol{r}'\rho(\boldsymbol{r}')d\tau'$ (离散形式: $\sum q_i\boldsymbol{r}_i$)

$$V_{dip}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}\cdot\hat{r}}{r^2}$$

$$\boldsymbol{E}_{dip}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3}[3(\boldsymbol{p}\cdot\hat{r})\hat{r} - \boldsymbol{p}]$$

* 注：若总电荷 $Q = 0$，则 $\boldsymbol{p}$ 的值与坐标原点的选择无关。

极化强度 $\boldsymbol{P}$ = 单位体积的偶极矩。

束缚电荷 (Bound Charges):

$$\rho_b = -\nabla\cdot\boldsymbol{P} \quad (\text{体束缚电荷})$$

$$\sigma_b = \boldsymbol{P}\cdot\hat{n} \quad (\text{面束缚电荷})$$

* $\hat{n}$ 是电介质表面的 **向外**单位法向量。
* 总束缚电荷始终为零: $\int\rho_b d\tau + \oint\sigma_b da = 0$。

电位移矢量 $\boldsymbol{D}$:

$$\boldsymbol{D} = \epsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$$

$\boldsymbol{D}$ 的高斯定理 (仅包含自由电荷):

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \rho_f \implies \oint\boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{A} = Q_{f,\text{enc}}$$

* 线性、各向同性、均匀 (LIH) 介质:

$$\boldsymbol{P} = \epsilon_0\chi_e\boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{D} = \epsilon_0(1+\chi_e)\boldsymbol{E} = \epsilon\boldsymbol{E} = \epsilon_r\epsilon_0\boldsymbol{E}$$

边界条件 (一般形式):

$$\boldsymbol{E}_{1\parallel} - \boldsymbol{E}_{2\parallel} = 0 \implies \text{切向}\boldsymbol{E}\text{ 连续。}$$

$$\boldsymbol{D}_{1\perp} - \boldsymbol{D}_{2\perp} = \sigma_f \implies \text{法向}\boldsymbol{D}\text{ 突变}\sigma_f\text{。}$$

$$V_1 = V_2 \quad (\text{电势始终连续})$$

* 计算电介质中的电容套路: 由 Q_f 求 $D \to E = D/\epsilon \to V = \int Edl \to C = Q_f/V$。

毕奥-萨伐尔定律 (Biot-Savart Law):

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\frac{d\boldsymbol{l}'\times\hat{R}}{R^2}$$

安培定律 (Ampere's Law): (适用于高对称性，如圆柱、平面)

$$\oint\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I_{\text{enc}} \implies \nabla\times\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{J}$$

* 长同轴电缆 ($a < s < b$ 间隙处): $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}\hat{\phi}$
* 螺线管 (内部): $B = \mu_0 nI$ (n = 单位长度匝数)

磁矢势 $\boldsymbol{A}$ (Magnetic Vector Potential):

$$\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A}, \quad \nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0$$

远场标准磁偶极子:

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{m}\times\hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0(\pi\lambda\omega R^3)}{4\pi}\frac{\hat{z}\times\hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0\lambda\omega R^3}{4r^2}\sin\theta\hat{\phi}$$

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}(2\cos\theta\hat{r} + \sin\theta\hat{\theta}) = \frac{\mu_0\lambda\omega R^3}{4r^3}(2\cos\theta\hat{r} + \sin\theta\hat{\theta})$$

库仑规范 ($\nabla\cdot\boldsymbol{A} = 0$) $\implies \nabla^2\boldsymbol{A} = -\mu_0\boldsymbol{J}$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}d\tau'$$

磁性介质与束缚电流: 磁化强度 $\boldsymbol{M}$ (单位体积的磁偶极矩)。

$$\boldsymbol{J}_b = \nabla\times\boldsymbol{M} \quad (\text{体电流}), \quad \boldsymbol{K}_b = \boldsymbol{M}\times\hat{n} \quad (\text{面电流})$$

$$\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M} \implies \nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}_f$$

线性介质: $\boldsymbol{M} = \chi_m\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H} = \mu_r\mu_0\boldsymbol{H}$。

法拉第电磁感应定律:

$$\mathcal{E} = \oint\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\int\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{A}$$

微分形式: $\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$.

* 楞次定律: 感应电流的方向总是阻碍磁通量 Φ_B 的变化。
* *在半径为 s 的圆形区域内有均匀变化的 $\boldsymbol{B}$:*

$$E(r<s) = -\frac{r}{2}\frac{dB}{dt}; \quad E(r>s) = -\frac{s^2}{2r}\frac{dB}{dt}$$

电感 (L) 与磁能 (U):

$$L = \frac{\Phi_B}{I}, \quad \mathcal{E} = -L\frac{dI}{dt}$$

磁能密度: $u_B = \frac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H} = \frac{B^2}{2\mu_0}$ 总磁能:

$$U = \int u_B d\tau = \frac{1}{2}LI^2 \implies L = \frac{2U}{I^2}$$

* *同轴电缆单位长度自感: $L/l = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln(b/a)$。*

麦克斯韦方程组 (介质中):

1. $\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \rho_f$ (高斯定律)
2. $\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0$ (无磁单极子定律)
3. $\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$ (法拉第定律)
4. $\nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}_f + \frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$ (安培-麦克斯韦定律)

坡印廷定理 (能量守恒):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla\cdot\boldsymbol{S} = -\boldsymbol{J}_f\cdot\boldsymbol{E}$$

坡印廷矢量 (能流密度): $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})$。

波动方程 (无源、LIH 介质):

$$\nabla^2\boldsymbol{E} = \mu\epsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}, \quad v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

平面波： $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$
* 色散关系：$k=\omega\sqrt{\mu\epsilon} \implies \omega=vk$。
* 正交性：$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}=0$, $\quad \boldsymbol{B}=\frac{1}{\omega}(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E})=\frac{1}{v}(\hat{k}\times\boldsymbol{E})$。
* 振幅关系：$B_0=E_0/v$。
* 能量：$u_E=u_B$, $u=\epsilon E^2$. 时间平均 $\langle\boldsymbol{S}\rangle=\frac{1}{2}\epsilon v E_0^2\hat{k}$。

复介电常数 (吸收介质)： 若 $\epsilon=\epsilon_1+i\epsilon_2$, 波矢变为复数 $k=k_1+ik_2$。

$$k_1=\omega\sqrt{\frac{\mu_0(|\epsilon|+\epsilon_1)}{2}}, \quad k_2=\omega\sqrt{\frac{\mu_0(|\epsilon|-\epsilon_1)}{2}}$$

* 衰减：波的振幅随 $e^{-k_2 z}$ 呈指数衰减。
* 趋肤深度：$\delta=1/k_2$。相速度 $v_p=\omega/k_1$。

波的叠加与速度： 两列波 $\omega_1\approx\omega_2$, $k_1\approx k_2$ 叠加会产生拍频 (beats)。
* 载波相速度 (Phase velocity)：$v_p=\bar{\omega}/\bar{k}=\omega/k$。
* 包络群速度 (Group velocity)：$v_g=d\omega/dk$。

界面位于 $x=0$。入射波 (I)、反射波 (R)、透射波 (T)：

$$E_I=\tilde{E}_{0I}e^{i(k_1 x\cos\theta_I+k_1 y\sin\theta_I-\omega t)}\hat{z}$$

$$E_R=\tilde{E}_{0R}e^{i(-k_1 x\cos\theta_R+k_1 y\sin\theta_R-\omega t)}\hat{z}$$

$$E_T=\tilde{E}_{0T}e^{i(k_2 x\cos\theta_T+k_2 y\sin\theta_T-\omega t)}\hat{z}$$

斯涅尔定律 (Snell's Law)：$\theta_I=\theta_R$, $\quad n_1\sin\theta_I=n_2\sin\theta_T$。

边界条件： $\boldsymbol{E}_\parallel$，$\boldsymbol{B}_\perp$ 连续；$\boldsymbol{B}_\parallel/\mu$，$\boldsymbol{D}_\perp$ 连续。

TE 模式 / s-极化 ($\boldsymbol{E}\perp$ 入射面)： 令 $\alpha=\frac{\cos\theta_T}{\cos\theta_I}$, $\beta=\frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2}\approx\frac{n_2}{n_1}$ (若 $\mu_1=\mu_2$)。

$$r=\frac{\tilde{E}_{0R}}{\tilde{E}_{0I}}=\frac{1-\alpha\beta}{1+\alpha\beta}, \quad t=\frac{\tilde{E}_{0T}}{\tilde{E}_{0I}}=\frac{2}{1+\alpha\beta}$$

* 反射率 $R=|r|^2$. 透射率 $T=\alpha\beta|t|^2$. $R+T=1$.
* *布儒斯特角：* 发生于反射波振幅 $r=0$ 时。对于 TE 模式，要求 $1-\alpha\beta=0 \implies n_1=n_2$。因此，**TE 模式不存在布儒斯特角**。

TM 模式 / p-极化 ($\boldsymbol{B}\perp$ 入射面)：

$$r=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}, \quad t=\frac{2}{\alpha+\beta}$$

* *布儒斯特角：* 发生于 $\alpha=\beta$ 时。$\theta_B\approx\arctan(n_2/n_1)$。

由 ϕ 和 $\boldsymbol{A}$ 求解电磁场：

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\phi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}, \quad \boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$$

* 洛伦兹规范：$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=-\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\phi}{\partial t}$。这使得 ϕ 和 $\boldsymbol{A}$ 的波动方程完全解耦。
* *示例：* 若 $\phi=0$, $\boldsymbol{A}=A_0\sin(kx-\omega t)\hat{y}$。

则 $\boldsymbol{E}=A_0\omega\cos(\dots)\hat{y}$, $\boldsymbol{B}=A_0 k\cos(\dots)\hat{z}$。

必须要求 $\omega=ck$ 才能满足真空麦克斯韦方程组。

球坐标系基矢转换： $x=r\sin\theta\cos\phi$, $y=r\sin\theta\sin\phi$, $z=r\cos\theta$.

$\hat{x}=\sin\theta\cos\phi\hat{r}+\cos\theta\cos\phi\hat{\theta}-\sin\phi\hat{\phi}$

$\hat{y}=\sin\theta\sin\phi\hat{r}+\cos\theta\sin\phi\hat{\theta}+\cos\phi\hat{\phi}$

$\hat{z}=\cos\theta\hat{r}-\sin\theta\hat{\theta}$

$\hat{\phi}=-\sin\phi\hat{x}+\cos\phi\hat{y}$

$\hat{\theta}=\cos\theta\cos\phi\hat{x}+\cos\theta\sin\phi\hat{y}-\sin\theta\hat{z}$

$\hat{r}=\sin\theta\cos\phi\hat{x}+\sin\theta\sin\phi\hat{y}+\cos\theta\hat{z}$

球坐标系正交关系：

$\hat{r}\times\hat{\theta}=\hat{\phi}, \quad \hat{\theta}\times\hat{\phi}=\hat{r}, \quad \hat{\phi}\times\hat{r}=\hat{\theta}$

球坐标系下的梯度与散度：

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial r}\hat{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\hat{\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\phi}\hat{\phi}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$$

1. 电介质与电容：

$$Q_f \xrightarrow{\oint\boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{A}=Q_f} \boldsymbol{D} \xrightarrow{\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{D}}{\epsilon}} \boldsymbol{E} \xrightarrow{\int\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}} V \implies C=\frac{Q_f}{V}$$

* **求束缚电荷：** $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{D}-\epsilon_0\boldsymbol{E} \implies \rho_b=-\nabla\cdot\boldsymbol{P}, \sigma_b=\boldsymbol{P}\cdot\hat{n}_{out}$

2. 磁介质与电感：

$$I_f \xrightarrow{\oint\boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}=I_f} \boldsymbol{H} \xrightarrow{\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}} \boldsymbol{B} \xrightarrow{\int\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{A}} \Phi_B \implies L=\frac{\Phi_B}{I_f}$$

* **能量法求电感：** $U=\int\frac{B^2}{2\mu}d\tau \implies L=\frac{2U}{I_f^2}$
* **求束缚电流：** $\boldsymbol{M}=\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}-\boldsymbol{H} \implies \boldsymbol{J}_b=\nabla\times\boldsymbol{M}, \boldsymbol{K}_b=\boldsymbol{M}\times\hat{n}_{out}$

3. 变磁场与感应电场：

$$\boldsymbol{B}(t) \xrightarrow{\int\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{A}} \Phi_B(t) \xrightarrow{-\frac{d}{dt}} \mathcal{E} \xrightarrow{\oint\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=\mathcal{E}} \boldsymbol{E}_{ind}$$

* **能量流验证：** $\boldsymbol{S}=\frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}) \xrightarrow{\oint\boldsymbol{S}\cdot d\boldsymbol{A}} P_{in}=\frac{dU_B}{dt}$

4. 电磁波界面透射/反射：

①：画出界面，利用斯涅尔定律定 $\boldsymbol{k}_I,\boldsymbol{k}_R,\boldsymbol{k}_T$ 方向。

②：$\boldsymbol{E}\perp$ 入射面 (TE) 或 $\boldsymbol{B}\perp$ 入射面 (TM)。

③：用 $\boldsymbol{B}=\frac{1}{v}(\hat{k}\times\boldsymbol{E})$ 或 $\boldsymbol{E}=-v(\hat{k}\times\boldsymbol{B})$ 补全所有场。

④：界面处 $\boldsymbol{E}_\parallel$ 连续，$\boldsymbol{B}_\parallel/\mu$ 连续。

⑤：联立方程组，解出 r 和 t。

* **Permittivity** - 介电常数 (ϵ)
* **Permeability** - 磁导率 (μ)
* **Method of Images** - 镜像法
* **Multipole Expansion** - 多极展开
* **Electric Displacement** - 电位移矢量 ($\boldsymbol{D}$)
* **Magnetic Vector Potential** - 磁矢势 ($\boldsymbol{A}$)
* **Poynting Vector** - 坡印廷矢量 / 能流密度 ($\boldsymbol{S}$)
* **Dispersion Relation** - 色散关系
* **Phase Velocity / Group Velocity** - 相速度 / 群速度
* **Attenuation** - 衰减
* **Brewster's Angle** - 布儒斯特角
* **Polarization** - 极化 (介质中) / 偏振 (电磁波)
* **Indutance** - 电感 (L)

设带电量为 q 的点电荷位于坐标原点，一个半径为 R、长度为 L、均匀体电荷密度为 ρ 的实心圆柱体被放置在 z 轴上。圆柱靠近原点的一端位于 $z=d$ 处，较远的一端位于 $z=d+L$ 处。

$$E_z=\int_d^{d+L}\frac{\rho}{2\epsilon_0}\left(1-\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)dz$$

$$=\frac{\rho}{2\epsilon_0}\left(L+\sqrt{d^2+R^2}-\sqrt{(d+L)^2+R^2}\right)$$

$$F=\frac{q\rho}{2\epsilon_0}\left(L+\sqrt{d^2+R^2}-\sqrt{(d+L)^2+R^2}\right)$$