- **推迟时间:** $t_r = t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}$
- **矢量势:** $\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}',t_r)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathrm{d}^3r'$
- **开关闭合极限:** 从 $t=0$ 通电，距离导线 s 处，积分上限受限于 $t_r > 0$，即有效导线长度截断为 $z_{max} = \sqrt{(ct)^2 - s^2}$

运动点电荷 $\beta = \mathbf{v}/c, \gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$:

- **相对论分母:** $[R - \mathbf{R}\cdot\beta]_{ret} = \sqrt{(x-vt)^2 + (y^2+z^2)/\gamma^2}$
- **标量/矢量势:** $\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{[R-\mathbf{R}\cdot\beta]_{ret}}$, $\mathbf{A} = \frac{\mathbf{v}}{c^2}\phi$
- **坡印廷矢量:** $\mathbf{S} = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c}\frac{\sin^2\theta}{r^2}[\ddot{p}(t_r)]^2\hat{\mathbf{r}}$
- **Larmor 辐射功率:** $P(t) = \frac{\mu_0[\ddot{p}(t_r)]^2}{6\pi c}$

HW4.1: 无限长导线通电 $I = kt(t>0)$，求场。

解答: 仅有满足 $t_r = t - \frac{\sqrt{s^2+z^2}}{c} > 0$ 的导线对场点有贡献，积分限截断为 $\pm z_{max} = \pm\sqrt{(ct)^2 - s^2}$：

$$A_z = \frac{\mu_0 k}{4\pi}\int_{-z_{max}}^{z_{max}} \frac{t - \frac{\sqrt{s^2+z^2}}{c}}{\sqrt{s^2+z^2}}\mathrm{d}z$$

$$= \frac{\mu_0 k}{2\pi}\left[t\ln\left(\frac{\sqrt{(ct)^2-s^2}+ct}{s}\right) - \frac{1}{c}\sqrt{(ct)^2-s^2}\right]$$

由 $\mathbf{E} = -\partial_t\mathbf{A}$ 且 $\mathbf{B} = -\partial_s A_z\hat{\phi}$ 求导:

$$\mathbf{E} = -\frac{\mu_0 k}{2\pi}\ln\left(\frac{\sqrt{(ct)^2-s^2}+ct}{s}\right)\hat{z}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 k}{2\pi s}\left[t - \frac{1}{c}\sqrt{(ct)^2-s^2}\right]\hat{\phi}$$

HW4.1: 无限长导线 $t=0$ 突然通电 I_0，求场。

解答: 同上

$$A_z = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi}\ln\left(\frac{\sqrt{(ct)^2-s^2}+ct}{s}\right)$$

HW4.2: 电容 C 极板间距 d，初电荷 Q_0，接入电阻 R 放电 $Q(t) = Q_0 e^{-t/RC}$。求辐射功率。

解答: 电偶极矩 $p(t) = Q_0 d e^{-t/RC}$，

$$\ddot{p}(t_r) = \frac{Q_0 d}{(RC)^2}e^{-(t-r/c)/RC}$$

代入 Larmor 公式：$P(t) = \frac{\mu_0}{6\pi c}\left[\frac{Q_0 d}{(RC)^2}e^{-(t-r/c)/RC}\right]^2$

HW4.3: 点电荷 q 沿 x 轴以匀速 $\mathbf{v} = v\hat{x}$ 运动，求推迟时间、LW 势、电场及其非相对论极限。

解答: 由推迟条件 $\sqrt{(x-vt')^2+y^2+z^2} = c(t-t')$ 展开求解，取 $t' < t$ 的根：

$$t' = \gamma^2\left(t - \frac{xv}{c^2}\right) - \frac{\gamma}{c}\sqrt{\gamma^2(x-vt)^2+y^2+z^2}$$

相对距离矢量 $\mathbf{R}_{pres} = \{x-vt, y, z\}$，距离 $R_{pres} = |\mathbf{R}_{pres}|$。推迟分母：$[R - \mathbf{R}\cdot\vec{\beta}]_{ret} = \frac{1}{\gamma}\sqrt{\gamma^2(x-vt)^2+y^2+z^2}$

Lienard-Wiechert 势：$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2(x-vt)^2+y^2+z^2}}$， $\mathbf{A} = \frac{\mathbf{v}}{c^2}\phi$。LW 电场分子化简为 $[\mathbf{R} - \vec{\beta}R]_{ret} = \mathbf{R}_{pres}$，代入得：

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1-\beta^2}{[(x-vt)^2+(1-\beta^2)(y^2+z^2)]^{3/2}}\mathbf{R}_{pres}$$

对 $v \ll c$：$\phi \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_{pres}}$， $\mathbf{A} \approx \frac{\mu_0 q\mathbf{v}}{4\pi R_{pres}}$， $\mathbf{E} \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{R}_{pres}}{R_{pres}^3}$

- d_3 **(外微分):** 升阶 $p \to p+1$。
- $*_3$ **(Hodge 星):** 降/升阶 $p \to 3-p$。$\boldsymbol{*_3 *_3 = 1}$。
- **伴随算子:** $d_3^*\alpha = (-1)^p *_3 \mathrm{d}_3 *_3 \alpha$ (降阶 $p \to p-1$)。

设 0-form f, 1-form $\tilde{F} \leftrightarrow \mathbf{F}$, 2-form $\alpha \leftrightarrow \mathbf{B}$:

- **外微分** d_3**:** $\mathrm{d}_3 f \iff \nabla f$, $\mathrm{d}_3\tilde{F} \iff \nabla\times\mathbf{F}$, $\mathrm{d}_3\alpha \iff \nabla\cdot\mathbf{B}$
- **余微分** d_3^***:** $d_3^*\tilde{F} = -*_3\mathrm{d}_3 *_3 \tilde{F} \iff -\nabla\cdot\mathbf{F}$, $d_3^*\alpha = +*_3\mathrm{d}_3 *_3\alpha \iff \nabla\times\mathbf{B}$
- **拉普拉斯:** $\Delta_3 = \mathrm{d}_3\mathrm{d}_3^* + \mathrm{d}_3^*\mathrm{d}_3 = -\nabla^2$ (无时导)

四维闵氏时空 $\mathbb{R}^{3,1}$ **(度规** $+---$**)**

设纯空间 p-form α (仅含 $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z$):

- **内积:** $\langle\alpha,\alpha\rangle_4 = (-1)^p\langle\alpha,\alpha\rangle_3$, $\mathrm{vol}_4 = c\mathrm{d}t\wedge\mathrm{vol}_3$
- **星号作用:** $*\alpha = c\mathrm{d}t\wedge *_3\alpha$；$*(\alpha\wedge c\mathrm{d}t) = *_3\alpha$
- **外/余微分:** $\mathrm{d}(\alpha\wedge c\mathrm{d}t) = \mathrm{d}_3\alpha\wedge c\mathrm{d}t$；$\mathrm{d}^*\alpha = -d_3^*\alpha$
- **含时推论:** $\mathrm{d}^*(\alpha\wedge c\mathrm{d}t) = -d_3^*\alpha\wedge c\mathrm{d}t - (-1)^p\frac{1}{c}\partial_t\alpha$
- **达朗贝尔算子:** $\Delta = \mathrm{d}\mathrm{d}^* + \mathrm{d}^*\mathrm{d} = -\Box = -(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \nabla^2)$

HW5.1: 证明三维算子等价性 $\nabla\times\mathbf{F} \leftrightarrow *_3\mathrm{d}_3\tilde{F}$、$\nabla\cdot\mathbf{B} \leftrightarrow *_3\mathrm{d}_3 *_3\tilde{B}$，写出面积分与 Maxwell 方程的微分形式，并推导静磁泊松方程。

解答: a) **旋度**: $\mathrm{d}_3\tilde{F} = (\partial_x F_y - \partial_y F_x)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y + \dots$ 作用 $*_3$ 取对偶得 $(\partial_x F_y - \partial_y F_x)\mathrm{d}z + \dots$ 完美对应 $\nabla\times\mathbf{F}$ 各分量。

散度: $\tilde{B}$ 对应 2-form $*_3\tilde{B} = B_x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + \dots$。求外微分得 3-form $\mathrm{d}_3(*_3\tilde{B}) = (\partial_x B_x + \partial_y B_y + \partial_z B_z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$。再作用 $*_3$ 得标量 $\nabla\cdot\mathbf{B}$。

b) **面积分**: 有向面元 $\mathrm{d}\mathbf{S} = (\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z, \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x, \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)$，被积函数 $\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = F_x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + \dots = *_3\tilde{F}$，故 $\int_S\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \int_S *_3\tilde{F}$ 。

c) **Maxwell 方程** ($\tilde{E}, \tilde{B}, \tilde{J}$ 均为 1-form)：

$$*_3\mathrm{d}_3 *_3\tilde{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad *_3\mathrm{d}_3 *_3\tilde{B} = 0$$

$$\mathrm{d}_3\tilde{E} = -*_3\partial_t\tilde{B}, \quad \mathrm{d}_3\tilde{B} = \mu_0 *_3\tilde{J} + \mu_0\epsilon_0 *_3\partial_t\tilde{E}$$

d) **泊松方程**: 磁矢势满足 $\tilde{B} = *_3\mathrm{d}_3\tilde{A}$。库仑规范 $\nabla\cdot\mathbf{A} = 0 \implies *_3\mathrm{d}_3 *_3\tilde{A} = 0 \implies \mathrm{d}_3^*\tilde{A} = 0 \implies \mathrm{d}_3\mathrm{d}_3^*\tilde{A} = 0$ 。代入稳恒安培定律 $*_3\mathrm{d}_3\tilde{B} = \mu_0\tilde{J} \implies *_3\mathrm{d}_3 *_3\mathrm{d}_3\tilde{A} = \mu_0\tilde{J}$，由 $\mathrm{d}_3^* = -*_3\mathrm{d}_3 *_3$ 知 $-\mathrm{d}_3^*\mathrm{d}_3\tilde{A} = \mu_0\tilde{J}$ ，补上零项即得 $(\mathrm{d}_3\mathrm{d}_3^* + \mathrm{d}_3^*\mathrm{d}_3)\tilde{A} = -\mu_0\tilde{J}$ 。

HW5.2ab: 证明 $*(\alpha\wedge c\mathrm{d}t) = *_3\alpha$ 及 $\Delta = -\Box$。

解答: 1) $(\alpha\wedge c\mathrm{d}t)\wedge *_3\alpha = (-1)^p c\mathrm{d}t\wedge\alpha\wedge *_3\alpha = \langle\alpha\wedge c\mathrm{d}t, \alpha\wedge c\mathrm{d}t\rangle_4\mathrm{vol}_4$，成立。

2) ： $\omega = \alpha + \beta\wedge c\mathrm{d}t$。展开 $(\mathrm{d}\mathrm{d}^* + \mathrm{d}^*\mathrm{d})\alpha$，含 $c\mathrm{d}t$ 交叉项符号相反完全抵消，剩 $-(d_3 d_3^* + d_3^* d_3)\alpha - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\alpha = (\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2)\alpha = -\Box\alpha$。

HW5.2cd: 证 $\mathrm{d}F = 0$, $\mathrm{d}^*F = J$ 等价于 Maxwell，推波动方程。

解答: 场 $F = \frac{1}{c}\tilde{E}\wedge c\mathrm{d}t + *_3\tilde{B}$。

1) **齐次**: $\mathrm{d}F = \mathrm{d}_3 *_3\tilde{B} + \frac{1}{c}(\mathrm{d}_3\tilde{E} + *_3\partial_t\tilde{B})\wedge c\mathrm{d}t = 0$。基底分离即得 $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$ 及 $\nabla\times\mathbf{E} = -\partial_t\mathbf{B}$。

2) **非齐次**: $*F = \frac{1}{c}*_3\tilde{E} - \tilde{B}\wedge c\mathrm{d}t$。求 $\mathrm{d}*F$ 并再作用 $*$ 得 $d^*F = (\nabla\cdot\mathbf{E})\mathrm{d}t - \nabla\times\mathbf{B} + \mu_0\epsilon_0\partial_t\mathbf{E}$。对比 J 基底即得两定律。

3) **波动方程**: $F = \mathrm{d}A$。洛伦兹规范 $\mathrm{d}^*A = 0 \implies \mathrm{d}\mathrm{d}^*A =$

0。加到非齐次 $d^*dA=J$ 左边得 $(dd^*+d^*d)A=J\implies -\Box A=J$。

- **场张量:** $F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$。分量 $F_{0i}=-E_i/c, F_{ij}=\epsilon_{ijk}B_k$。
- **对偶张量:** $\tilde F_{\mu\nu}=\frac12\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}$。
- **四维电流:** $J^\mu=(c\rho,\mathbf{j}) \iff J=\frac{\rho}{\epsilon_0}\mathrm{d}t-\mu_0\tilde J$
- **齐次方程 (法拉第/高斯磁):** $\partial_\mu \tilde F^{\mu\nu}=0 \iff \mathrm{d}F=0$
- **非齐次方程 (安培/高斯电):** $\partial_\mu F^{\mu\nu}=-J^\nu \iff \mathrm{d}^*F=J$
- **作用量:** $S=\int \mathrm{d}^4x\left(-\frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\frac{1}{\mu_0}J^\mu A_\mu\right)$
- **不变量:** $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}=2(\mathbf{B}^2-\mathbf{E}^2/c^2)$

洛伦兹变换 (Lorentz Trans 沿 x 轴)

张量变换法则: $F_{\mu\nu}(x)=\Lambda^\rho{}_\mu\Lambda^\sigma{}_\nu\tilde F_{\rho\sigma}(\Lambda x)$

- **平行不变:** $E_x=\bar E_x,\quad B_x=\bar B_x$
- **垂直混入:** $E_y=\gamma(\bar E_y+v\bar B_z),\quad E_z=\gamma(\bar E_z-v\bar B_y)$
  $B_y=\gamma(\bar B_y-\frac{v}{c^2}\bar E_z),\quad B_z=\gamma(\bar B_z+\frac{v}{c^2}\bar E_y)$

HW6.1: $\tilde S$ 系点电荷静止，求运动系 S 中的势与场。

解答: 1) **势的变换**: $\tilde S$ 中四维势 $\tilde A_\nu=(-\tilde\phi/c,\mathbf{0})$。由 $A_\mu=\Lambda^\nu_\mu\tilde A_\nu$ 矩阵乘法:

$A_0=\gamma(-\tilde\phi/c)\implies\phi=\gamma\tilde\phi$

$A_1=-\gamma\frac{v}{c}(-\frac{\tilde\phi}{c})\implies A_x=\frac{v}{c^2}\phi$

代入坐标收缩 $x'=\gamma(x-vt)$，结果与 L-W 势完全一致。

2) **场张量变换** $F=\Lambda\tilde F\Lambda^T$:

$F_{01}=\Lambda^0_0\Lambda^1_1\tilde F_{01}+\Lambda^0_1\Lambda^1_0\tilde F_{10}=\gamma^2(1-\frac{v^2}{c^2})\tilde F_{01}\implies E_x=\tilde E_x$。

$F_{02}=\Lambda^0_0\Lambda^2_2\tilde F_{02}=\gamma\tilde F_{02}\implies E_y=\gamma\tilde E_y$。

$F_{12}=\Lambda^0_1\Lambda^2_2\tilde F_{02}=-\gamma\frac{v}{c}(-\tilde E_y/c)\implies B_z=\gamma\frac{v}{c^2}E_y$。

HW6.2: 线电荷密度 η 沿 x 轴，观察者以 v 沿 x 运动。

解答: 1) **静止系场**: $\mathbf{E}=\frac{\eta\hat r_\perp}{2\pi\epsilon_0 r_\perp}$，$\mathbf{B}=0$。

2) **相对论变换**: $\bar E_\perp=\gamma E_\perp, \bar B_\phi=-\gamma\frac{v}{c^2}E_\perp=-\frac{\gamma v\eta r_\perp}{2\pi\epsilon_0c^2r_\perp^2}$。

3) **安培定律验证**: 运动系导线收缩，电荷密度 $\bar\eta=\gamma\eta$。形成反向电流 $\bar I=-\gamma\eta v$。代入长直导线磁场 $\bar{\mathbf B}=\frac{\mu_0\bar I}{2\pi r_\perp}\hat\phi$，由于 $\mu_0\epsilon_0=1/c^2$，两种结果一致。

HW6.3: 从 $F=dA$ 到作用量变分 $\delta S=0$ 推导全过程。

解答: (a) 证 $\mathbf{F}_{\mu\nu}$: $F=d(A_\nu dx^\nu)=\partial_\mu A_\nu dx^\mu\wedge dx^\nu$。利用反对称化 $dx^\mu\wedge dx^\nu=\frac12(dx^\mu\wedge dx^\nu-dx^\nu\wedge dx^\mu)$，得 $F=\frac12(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)dx^\mu\wedge dx^\nu\implies F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$。

(b) 验证分量: $F_{0i}=\partial_0A_i-\partial_iA_0=\frac1c\partial_tA_i-\partial_i(-\frac{\phi}{c})=-E_i/c$。$F_{ij}=\partial_iA_j-\partial_jA_i=\epsilon_{ijk}B_k$。

(c) 证 $\tilde{\mathbf F}_{\mu\nu}$: 对偶 $*F=\frac12F_{\rho\sigma}*(dx^\rho\wedge dx^\sigma)$。

代入星算子展开 $=\frac14F_{\rho\sigma}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\eta^{\alpha\rho}\eta^{\beta\sigma}dx^\mu\wedge dx^\nu$。升指标得 $\frac14\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}dx^\mu\wedge dx^\nu$，提取系数得 $\tilde F_{\mu\nu}=\frac12\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}$。

(d) 导出作用量 $\mathbf{S[A]}$: $F\wedge*F\propto F_{\mu\nu}\tilde F_{\rho\sigma}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{d}^4x\propto F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\mathrm{d}^4x$。

其中 $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}=2F_{0i}F^{0i}+F_{ij}F^{ij}=-2(E/c)^2+2B^2$。

积分即得 $S[A]=\int \mathrm{d}^4x\left(-\frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\frac1{\mu_0}J^\mu A_\mu\right)$。

(e) 变分 $\delta\mathbf{S}=\mathbf{0}$: $\delta S=\int \mathrm{d}^4x\left(-\frac{1}{2\mu_0}F^{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu}+\frac{1}{\mu_0}J^\nu\delta A_\nu\right)$。

代入 $\delta F_{\mu\nu}=\partial_\mu\delta A_\nu-\partial_\nu\delta A_\mu$，合并得 $-F^{\mu\nu}\partial_\mu\delta A_\nu$。分部积分将偏导转移: $\int \mathrm{d}^4x\frac{1}{\mu_0}(\partial_\mu F^{\mu\nu}+J^\nu)\delta A_\nu=0\implies\partial_\mu F^{\mu\nu}=-J^\nu$。

(f) 恢复齐次方程: 展开 Bianchi 恒等式 $\partial_\mu\tilde F^{\mu\nu}=0$。

$\nu=0$ 时: $\partial_i\tilde F^{i0}=\partial_iB_i=0\implies\nabla\cdot\mathbf B=0$。

$\nu=j$ 时: $\partial_0\tilde F^{0j}+\partial_i\tilde F^{ij}=\frac1c\partial_t(-B_j)+\partial_i(-\epsilon_{ijk}E_k/c)=0$，提负号即得 $\partial_t\mathbf B+\nabla\times\mathbf E=0$。

设主从在重叠区 $U_{\alpha\beta}$ 的转移函数为 $\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1}=e^\chi$:

- **局部截面 (波函数变换):** $\sigma_\beta(x)=\sigma_\alpha(x)e^{\chi(x)}$
- **联络 1-form (规范势变换):** $A_\beta=A_\alpha+\mathrm{d}\chi$

HW7.1: (a) 求余切丛 T^*X 局部截面的变换法则。(b) 证主丛右 G-作用不依赖于局部平凡化选取。

解答: (a) 截面变换: T^*X 在 U_α 的局部标架为 $\{dx^i\}$。局部截面 $s_\alpha=\omega_i^{(\alpha)}dx^i$。在重叠区用链式法则展开基底 $dx^i=\frac{\partial x^i}{\partial y^j}dy^j$，对比系数得 $\omega_j^{(\beta)}=\omega_i^{(\alpha)}\frac{\partial x^i}{\partial y^j}$。

(b) 右作用良定义: 设平凡化 $\varphi_\alpha(p)=(x,h)$ 及 $\varphi_\beta(p)=(x,h')$，转移函数关系 $h'=t_{\beta\alpha}(x)h$。在 α 中定义右作用 $p\cdot_\alpha g=\varphi_\alpha^{-1}(x,hg)$。用 φ_β 观察该点:

$\varphi_\beta(p\cdot_\alpha g)=\varphi_\beta(\varphi_\alpha^{-1}(x,hg))=(x,t_{\beta\alpha}(hg))$。由李群结合律，$(t_{\beta\alpha}h)g=h'g$。故等于 $\varphi_\beta(p\cdot_\beta g)$。因 φ_β 为双射，必有 $p\cdot_\alpha g=p\cdot_\beta g$。

HW7.2: (a) 证 $A_\alpha=\sigma_\alpha^*A$。(b) 证截面变换导致 $A_\beta=A_\alpha+\mathrm{d}\chi$。

解答: (a) 截面拉回: $A=\varphi_\alpha^*(d\theta+A_i^{(\alpha)}dx^i)$。拉回 $A_\alpha=\sigma_\alpha^*A=(\varphi_\alpha\circ\sigma_\alpha)^*(d\theta+A_i^{(\alpha)}dx^i)$。由于 $\sigma_\alpha(x)=\varphi_\alpha^{-1}(x,1)$，复合映射 $(\varphi_\alpha\circ\sigma_\alpha)(x)=(x,1)$ 使得纤维角坐标恒为 $\theta=0$。故 $d\theta\to0$，只剩 $A_i^{(\alpha)}dx^i$。

(b) 几何本质: 截面定义 $\sigma_\alpha(x)=\varphi_\alpha^{-1}(x,1)$。代入转移函数 $\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1}=e^\chi$ 得 $\sigma_\beta(x)=\varphi_\alpha^{-1}(x,e^\chi)=\sigma_\alpha(x)e^\chi$。

全局联络可写为 $A=\mathrm{d}\theta_\alpha+\pi^*A_\alpha=\mathrm{d}\theta_\beta+\pi^*A_\beta$。

纤维坐标关系 $\theta_\alpha=\theta_\beta+\pi^*\chi\implies \mathrm{d}\theta_\alpha=\mathrm{d}\theta_\beta+\pi^*\mathrm{d}\chi$。

代入上式消去 $\mathrm{d}\theta_\beta$ 得 $\pi^*(A_\alpha+\mathrm{d}\chi)=\pi^*A_\beta$。因投影 π 为淹没，在底流形上必须严格成立 $A_\beta=A_\alpha+\mathrm{d}\chi$。

HW7.3: 证明无全局势、写出南北半球势与规范变换、验证磁通量。

解答: (a) 拓扑矛盾: 磁场高斯定律 $\mathrm{d}_3^*\tilde B=-g\delta^3(\mathbf r)$ 意味着包围原点球面 S^2 的通量为 $\oint_{S^2}*_3\tilde B=g$。若存在全局单值 $\tilde A$ 满足 $\mathrm{d}_3\tilde A=*_3\tilde B$，代入并使用 Stokes 定理: $g=\oint_{S^2}\mathrm{d}_3\tilde A=\int_{\partial S^2}\tilde A$。由于球面闭合无界，边界 $\partial S^2=\emptyset$，线积分为 0，导出 $g=0$。与电荷 $g\neq0$ 矛盾，故不存在全局 $\tilde A$。

(b) 双图册: 去除南极线构建北半球 $U_+(\theta\in[0,\pi))$；去除北极线构建南半球 $U_-(\theta\in(0,\pi])$。重叠区 $U_+\cap U_-$ 转移关系为 $\varphi_+=\varphi_-\pmod{2\pi}$。

(c) 规范变换与量子化: 两区域局部规范势 $\tilde A_\pm=\pm\frac{g}{4\pi}(1\mp\cos\theta)\mathrm{d}\varphi$。在赤道重叠区作差: $\tilde A_+-\tilde A_-=\frac{g}{2\pi}\mathrm{d}\varphi=\mathrm{d}\chi$。规范相角 $\chi=\frac{g}{2\pi}\varphi$。为保证波函数 $e^{i\chi}$ 绕 z 轴单值，$\chi(\varphi+2\pi)-\chi(\varphi)=2\pi n$，即导出 $\mathbf{g=2\pi n}$。

(d) 验证磁通量: $\tilde A_\pm$ 仅有 $\mathrm{d}\varphi$ 分量且依赖 θ。利用球坐标外微分 d_3:

$\mathrm{d}_3\tilde A_+=\partial_\theta\left[\frac{g}{4\pi}(1-\cos\theta)\right]\mathrm{d}\theta\wedge \mathrm{d}\varphi=\frac{g}{4\pi}\sin\theta \mathrm{d}\theta\wedge \mathrm{d}\varphi$。

$\mathrm{d}_3\tilde A_-=\partial_\theta\left[-\frac{g}{4\pi}(1+\cos\theta)\right]\mathrm{d}\theta\wedge \mathrm{d}\varphi=\frac{g}{4\pi}\sin\theta \mathrm{d}\theta\wedge \mathrm{d}\varphi$。

可见两者求外微分后完全一致，精确等于单极子对应磁通量 $*_3\tilde B$。