微分几何笔记

zdd

2025 年 1 月 27 日

目录

1　微分流形

定义 1.1

设 M 是一个第二可数的 Hausdorff 空间，满足对任意 $p \in M$，都存在包含 p 的开集 U，使得 U 与 $\mathbb{R}^n$ 中的开集同胚，则称 M 是一个 n **维拓扑流形**。

于是我们可以这样描述流形：局部欧氏的 Hausdorff 空间，其上任意一点 p，都存在 (U, φ_U)，这称为 p 附近的**局部图(chart)**，$\{x^i = \pi^i \circ \varphi : U \to \mathbb{R}\}$ 称为**局部坐标**，对所有覆盖了 M 的局部图($\bigcup U = M$)构成的集合 $\mathscr{D} = \{(U, \varphi_U)\}$ 称为 M 的一个**局部图册(atlas)**。对于两个局部图 $(U, \varphi_U), (V, \phi_V)$，我们能得到 $\mathbb{R}^n$ 中两个开集的同胚：

$$\phi_V \circ \varphi_U^{-1} : \varphi_U(U \cap V) \to \phi_V(U \cap V)$$

这称为**转移函数**。

对于 M 的开集 N，我们可以自然地构造 N 的局部图册：$\{(U \cap N, \varphi_U|_{U\cap N}\}$，从而得到 N 也是拓扑流形，称为 M 的**开子流形**。

对于两个流形 M_1, M_2，我们可以用笛卡尔积构造局部图册：$\{(U \times V, \varphi_U \times \phi_V)\}$，从而得到 $M_1 \times M_2$ 也是拓扑流形，称为**乘积流形**。

对于 M 上的等价关系 $\sim$，我们可以得到**商流形**。

拓扑的性质不足以在流形上定义微分与积分，我们对局部图册提高一点要求：

定义 1.2

如果一个流形 M 的两个局部图之间的转移函数是微分同胚，则称这两个局部图是**相容的**。

定义 1.3

如果 M 的局部图册 $\mathscr{D}$ 任两局部图相容，且 $\mathscr{D}$ 是最大的，则称 $\mathscr{D}$ 是 M 的一个**微分结构**。称装备了微分结构的拓扑流形为**微分流形**。

考虑微分流形之间的映射。

定义 1.4

$f : M \to N$ 是同胚，称 f 为 C^k **映射**，若对 M, N 任意局部图 $(U, \varphi_U), (V, \phi_V)$，都有 $\phi_V \circ f \circ \varphi_U^{-1} : \varphi_U(U) \to \phi_V(V)$ 是 C^k 的。类似的有**光滑映射**。

当 $M = \mathbb{R}$ 时，我们称 f 为**光滑曲线**，当 $N = \mathbb{R}$ 时，我们称 f 为**光滑函数**。

2　切向量

回忆我们在分析课中所学的，$\mathbb{R}^n$ 上我们定义函数 f 对 v 的方向导数为

$$D_v f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + hv) - f(x)}{h} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(x + tv)$$

这给出了一个算子 $D_v^x : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}, f \mapsto D_v f(x)$。若设 $v = (v^1, \cdots, v^n)$，则有

$$D_v^a = \sum_{i=1}^n v^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{x=a}$$

容易证明 D_v^x 是线性的且满足 Leibniz 法则：

$$D_v^x(fg) = f(x)D_v^x g + g(x)D_v^x f$$

而反过来的命题依然成立，即：若线性算子 $D : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ 满足在 x 处的 Leibniz 法则，则存在 $v \in \mathbb{R}^n$，$D = D_v^x$。

对于 $\mathbb{R}^n$ 中任一点，任何 $v \in \mathbb{R}^n$ 都可视为这个点的切向量，并且对应一个唯一的算子。而在流形 M 上，直观的向量已经并不存在，但 $\mathbb{R}^n$ 中的情形启发了我们去代数地定义流形 M 上的切向量，即上文中算子的定义：

定义 2.1

记 $C_p^\infty(M)$ 是 $p \in M$ 处局部光滑的函数全体。若线性映射 $v : C_p^\infty(M) \to \mathbb{R}$ 满足 Leibniz 法则 $v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f)$，则称 v 是 M 在点 p 的一个**切向量**。

容易验证在一点处切向量的全体构成线性空间，记为 T_pM，称为 M 在 p 点的**切空间**。

另一个较为直观的定义是由光滑曲线给出的。

定义 2.2

设 $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ 是光滑流形 M 上一条光滑曲线，$\gamma(0) = p$。定义映射 $v : C_p^\infty(M) \to \mathbb{R}$ 为

$$v(f) = \left.\frac{\mathrm{d}(f \circ \gamma)(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}$$

容易验证这是一个切向量，称为**光滑曲线 γ 在 0 处的切向量**，记为 $\gamma'(0)$。

我们可以证明这两种定义在某种意义上是等价的，具体而言，定义光滑曲线上的等价关系 $\gamma\ \tilde{\gamma}$ 当且仅当 $\gamma'(0) \sim \tilde{\gamma}'(0)$，得到的等价类与切向量是一一对应的。此时称 γ 与 $\tilde{\gamma}$ **相切**。

定理 2.1

设 M 为 n 维光滑流形，$p \in M$，对应的局部图为 (U, φ)。定义**偏微分算子**：

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(f) = \left.\frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)}$$

则 $\dim T_pM = n$，以 $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ 为一组基，也被称为切空间的**自然基底**。

对任意的 $v = \sum_{i=1}^n v^i \dfrac{\partial}{\partial x^i} \in T_pM$，取 $\gamma(t) = \varphi^{-1}(p^1 + tv^1, \cdots, p^n + tv^n)$，易证 $\gamma'(0) = v$。从而任意切向量都可以被表示为曲线的切向量。

定义 2.3

称线性空间 T_pM 的线性对偶为**余切空间**，记作 T_p^*M。

定义 2.4

设 M,N 是光滑流形，$F:M\to N$ 是光滑映射，$p\in M$，$q=F(p)\in N$，映射 $F_*:T_pM\to T_qN$ 定义为：(F_* 是 F 的拉回)

$$(F_*v)(f)=v(F^*f)=v(f\circ F),\forall f\in C_q^\infty(N)$$

称为 F 在点 p 的切映射。

容易验证 F_* 是线性的且满足 $(G\circ F)_*=G_*\circ F_*$。考虑 $F:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ 即为映射的微分 $\mathrm{d}f$。从中我们可以看到切映射将流形之间的映射变成线性空间之间的映射，进一步我们有：

定理 2.2

若 $F:M\to N$ 是微分同胚，则 $F_*:T_pM\to T_{F(p)}N$ 是线性同构。

在微积分中我们知道 $\mathbb{R}^n$ 中切空间的线性同构可以导出微分同胚，在流形上我们只有较弱的结论成立，即只有局部微分同胚：

定理 2.3 (反函数定理)

设 $F:M\to N$ 是光滑映射，$F_*:T_pM\to T_{F(p)}N$ 是线性同构，则存在 p 的邻域 U_1 和 $q=F(p)$ 的邻域 V_1 使得 $F|_{U_1}:U_1\to V_1$ 是微分同胚。

定义 2.5

设 M,N 是 C^K 流形，$f:M\to N$ 是 C^l 的($l\le k$)，$p\in M$，分别取 p，$f(p)$ 的局部图 (U,φ)，(V,ϕ)，称 $\phi\circ f\circ\varphi^{-1}$ 在 $\varphi(p)$ 处的秩为**映射 f 在 p 点的秩**。

由于 $\tilde{\phi}\circ f\circ\tilde{\varphi}=(\tilde{\phi}\circ\phi^{-1})(\phi\circ f\circ\varphi^{-1})(\varphi\circ\tilde{\varphi})$，故秩与局部图的选取无关，记为 $\mathrm{rank}f|_p$。注意到，当 $\mathrm{rank}f|_p=\dim M$ 时，f_* 是单射，这时称 f 在 p 点是**浸入(immersion)**。当 $\mathrm{rank}f|_p=\dim N$ 时，f_* 是满射，这时称 f 在 p 点是**淹没(submersion)**。根据定义，一个微分同胚既是浸入又是淹没。

典范淹没：$\pi:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n,(x_1,\cdots,x_m)\mapsto(x_1,\cdots,x_n)$。

典范浸入：$\iota:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n,(x_1,\cdots,x_m)\mapsto(x_1,\cdots,x_m,0,\cdots,0)$。

下面给出一个非常重要的定理，它告诉我们流形之间的常秩映射都与典范情形没有区别。

定理 2.4 (秩定理)

设 $f:M\to N$ 是点 p 附近一个秩为 r 的常秩映射，则存在 $p,f(p)$ 的局部图 $(U,\varphi),(V,\phi)$ 使得

$$\phi\circ f\circ\varphi^{-1}(x^1,\cdots,x^m)=(x^1,\cdots,x^r,0,\cdots,0)$$

定义 2.6

设 N 是流形且是闭集，$N' \hookrightarrow N$ 为包含映射，在 N' 上赋予子空间拓扑。若 $\exists m \le n$ 使得 $\forall q \in N'$，$\exists N$ 上含 q 的局部图 (V, ϕ, y) 满足 $\phi(q) = 0$ 且

$$\phi(V \cap N') = \left\{(y^1, \cdots, y^n) \in \phi(V) | y^{m+1} = \cdots = y^n = 0\right\}$$

则称 N' 为 N 的**正则子流形**。

定义 2.7

设 $f : M \to N$ 为单浸入，则称 $f(M)$ 为**单浸入子流形**。
设 $f : M \to N$ 为单浸入，且 $f(M)$ 由 f 诱导的拓扑结构与由 N 诱导的子拓扑结构同胚，则称 $f(M)$ 为 N 的**嵌入子流形**。

定理 2.5

$f(M)$ 为 N 的嵌入子流形当且仅当 $f(M) \hookrightarrow N$ 为正则子流形。

定理 2.6 (Whitney嵌入定理)

任何 m 维光滑流形可以被嵌入 $\mathbb{R}^{2m+1}$，和被浸入 $\mathbb{R}^{2m}$。

3 流形的特殊函数构造

定理 3.1 (Bump function)

$C \subset \mathbb{R}^n$ 闭，$K \subset \mathbb{R}^n$ 紧，$K \cap C = \emptyset$，那么存在 C^∞ 函数 $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, 1], \rho|_K \equiv 1, \rho|_C \equiv 0$

证明. 略。 □

推论 3.1

若 $f : U \to \mathbb{R} \in C^k$，$p \in U$，则存在 $p \in U_0 \subseteq U$，$f^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，$f^*|_{U_0} = f|_{U_0}$，$f^*|_{U^C} = 0$。

定义 3.1

设 M 是拓扑空间。

- 设 $\{A_\alpha\}, \{B_\beta\}$ 为 M 的开覆盖，若 $\forall \beta, \exists \alpha$ 使得 $B_\beta \subseteq A_\alpha$，称 $\{B_\beta\}$ 是 $\{A_\alpha\}$ 的**加细**。
- 设 $U = \{U_\alpha\}$ 为 M 的开覆盖，若 $\forall p \in M$，存在 $p \in W$，使得 W 仅与 U 中有限个元素相交，称 U 为**局部有限的**。

引理 3.1

设 M 为 C^k–流形，$\{A_\alpha\}$ 为开覆盖，那么存在可数坐标图 $\{\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n\}$ 满足：

- $\{U_i\}$ 是 $\{A_\alpha\}$ 局部有限的加细。
- $\varphi_i(U_i) = B_1(0)$。
- $\left\{V_i := \varphi^{-1}(B_{\frac{1}{2}}(0))\right\}$ 也为开覆盖。

定义 3.2

称上述引理得到的 $\{A_\alpha\}$ 之局部有限加细 (U_i, φ_i, V_i) 为从属于 $\{A_\alpha\}$ 的**正则覆盖**。

定义 3.3 (单位分解)

若 $\eta_i \in C^k(M, \mathbb{R}), i \in \mathbb{N}$ 满足：

- $0 \le \eta_i \le 1$
- $\sum \eta_i = 1$
- $\{\mathrm{supp}\eta_i = \{\eta_i \ne 0\}\}$ 为局部有限开覆盖。

则称 $\{\eta_i\}$ 为 M 上一个 C^k **单位分解**。
若 $\{A_\alpha\}$ 为开覆盖，$\forall i$，$\exists A_\alpha$ 使得 $\mathrm{supp}\eta_i \subseteq A_\alpha$ 则称 $\{\eta_i\}$ 为**从属于 $\{A_\alpha\}$ 的单位分解**。

定理 3.2 (单位分解)

设 M 是 C^k 流形，有可数基，(U_i, φ_i, V_i) 为局部有限正则覆盖，那么

- 存在单位分解 $\{\eta_i\}$ 使得 $\eta_i|_{V_i} > 0$ 且 $\mathrm{supp}\eta_i \subseteq \varphi_i^{-1}(B_{\frac{3}{4}}(0))$。
- 特别的，对任意开覆盖 $\{A_\alpha\}$ 均有从属于其的单位分解 $\{\eta_i\}$。

证明. 构造 Bump function h_i 使得

$$h_i|_{\bar{V}_i} \equiv 1,\ h_i|_{\varphi_i^{-1}(B_{\frac{3}{4}}(0))^C} \equiv 0$$

取

$$\eta = \frac{h_i}{\sum h_i}$$

由于 $\{U_i\}$ 为局部有限覆盖，$\mathrm{supp}h_i \subseteq U_i$，从而 $\sum h_i$ 有意义。 □

命题 3.1

设 M 是 C^k 流形，M 紧，则存在 $N \in \mathbb{N}$ 和映射 $f : M \to \mathbb{R}^N$ 使得 f 为嵌入，从而 $f(M)$ 是 $\mathbb{R}^N$ 的正则子流形。

证明. 先证明如下引理:

引理 3.2

设 $f: M \to N$ 是单浸入，若 M 紧，则 f 为嵌入。

Lemma's proof. 对于任意闭集 $V \subset M$，由于紧集的闭子集是紧集，V 是紧集，由 f 连续知 $f(V) \subset N$ 是紧集，而 N 是 Hausdorff 空间，因此 $f(V) \subset N$ 是闭集，所以 f 是闭映射，因此 f 是同胚，进而 f 是嵌入。 □

对 M 取局部有限正则覆盖 $\{U_i, \varphi_i, V_i\}$，由 M 紧可知 $\{U_i, \varphi_i, V_i\}_{i=1}^K$ 是有限正则覆盖。构造单位分解

$$\eta_i = \frac{h_i}{\sum h_i} : M \to [0,1], V_i \subseteq \mathrm{supp} h_i \subseteq U_i, \ h_i|_{V_i} \equiv 1$$

现取

$$f: M \to \mathbb{R}^{kn+k}, p \mapsto (h_1(p)\varphi_1(p), \cdots, h_k(p)\varphi_k(p), h_1(p), \cdots, h_k(p))$$

只需证 $f \in C^k$ 且 f 是单浸入，利用引理即证。读者自行验证不难。 □

4 向量场

接下来我们讨论更高一级的事物：向量场。令

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$$

为光滑流形 M 所有切向量的集合。如果我们将 TM 看作所有 $p \in M, v \in T_pM$ 的 (p, v) 构成的集合，则 TM 是光滑流形且 $\dim TM = 2\dim M$，这称为 M 上的**切丛**，T_pM 称为 TM 在 p 处的**纤维**，同理可以定义**余切丛** T_p^*M。**切向量场** X 指的是一个映射 $X: M \to TM$，对每个 $p \in M$，$X(p) \in T_pM$，即对每个 M 上的点选取了一个切向量。

记 $\Gamma(M, TM)$ 为 M 上所有切向量场的全体，$\Gamma(U, TM)$ 为 U 上所有切向量场的全体。

由于 TM 是光滑流形，故切向量场其实是两个光滑流形间的映射，对 M 中开集 U，若切向量场 $X: U \to TM$ 满足 X 是流形间的光滑映射且 $\pi \circ X = \mathrm{id}_U$，其中 $\pi: TM \to M, (p, v) \mapsto p$ 是投影映射，则称 X 是**光滑切向量场**，也称这样的映射 X 为切丛 TM 的一个**截面**。

对切向量场 $X: U \to TM$ 可以考虑它对光滑函数的作用。对 $f \in C^\infty(U)$，定义

$$X(f)(p) = X(p)(f), \forall p \in U$$

则 $X(f): U \to \mathbb{R}$。容易看到 X 是光滑切向量场当且仅当 $X(f) \in C^\infty(U), \forall f \in C^\infty(U)$，即 X 为 $C^\infty(U)$ 之间的映射。

定理 4.1

$X: U \to TM$ 是光滑切向量场当且仅当 $\forall p \in U$，$X(p)$ 在局部坐标下的分量是光滑函数。

反过来，我们对 $C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ 的映射 X 可以用 $X(p)(f) = X(f)(p)$ 诱导光滑切向量场，

具体而言：

定理 4.2

设 $\alpha : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ 为线性映射且满足 Leibniz 法则 $\alpha(fg) = f\alpha(g) + g\alpha(f)$，则存在唯一的光滑切向量场 $X : M \to TM$ 使得

$$X(f) = \alpha(f), \forall f \in C^\infty(M)$$

5 李群和李代数

定义 5.1

若在一个 $\mathbb{R}-$向量空间 V 上装备了 $[\cdot,\cdot] : V \times V \to V$ 满足反对称、双线性、Jacobi恒等式，则称 $(V, [\cdot,\cdot])$ 为 **Lie 代数**，$[\cdot,\cdot]$ 为 **Lie 括号**。

我们将切向量场看成 $C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ 的映射，定义

$$[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X$$

也是 $C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ 的映射，称为 X, Y 的 **Lie 括号**。容易验证这是线性映射且满足 Leibniz 法则，且具有反交换性 $[X, Y] = -[Y, X]$。我们还有：

定理 5.1

- 对 $f \in C^\infty(M)$ 有 $[fX, Y] = f[X, Y] - Y(f) \cdot X$
- (Jacobi恒等式) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$

定义 5.2

称 G 是一个**李群**，若 G 为微分流形，且存在乘法 $\cdot : G \times G \to G$ 与逆 $\iota : G \to G$ 满足 $\cdot$ 与 ι 都是光滑的。称 $g = T_eG$ 为群的**李代数**。

命题 5.1

存在双射 $g = T_eG \to \Gamma(G, TG)^{左不变}$，且在 $\Gamma(G, TG)^{左不变}$ 上有以 $\Gamma(G, TG)$ 诱导的李括号。

6 单参数变换群

定义 6.1

设 M 为 C^∞ 流形，若 C^∞ 映射 $\phi : \mathbb{R} \times M \to M, (t, p) \mapsto p$(记 $\phi(t, p) = \phi_t(p) = \phi_p(t)$)满足：

- $\forall p$，$\phi_0(p) = p$
- $\forall s, t \in \mathbb{R}$，$\phi_s \circ \phi_t = \phi_{s+t}$

则称 ϕ 为 $\mathbb{R}$ 在 M 上的**作用**，或称 $\{\phi_t\}_{t\in\mathbb{R}} \subseteq C^\infty(M, M)$ 为 M 上 C^∞ **单参数变换群**。

由于 $\phi_{-t}\circ\phi_t=\phi_t\circ\phi_{-t}=\phi_0=\mathrm{id}$，故 ϕ_t 为微分同胚。

定义 6.2

设 $U\subseteq M$ 含 p 的开集，在前述定义中用 $(-\varepsilon,\varepsilon)\times U$ 代替 $\mathbb{R}\times M$，要求 $s,t,s+t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$，则称 $\{\phi_t\}_{t\in(-\varepsilon,\varepsilon)}$ 为 U 到 M 的**局部单参数变换群**，ϕ_p 为过 p 的**轨道**。

注意到我们有

$$(\phi_p)'|_{t=0}=\frac{\mathrm{d}\phi_p(t)}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}(\in T_pM)=(\phi_p)_*(\frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{t=0})$$

从而 $\{(\phi_p)_*(\frac{\partial}{\partial t}|_{t=0})\}_{p\in U}$ 给出了 $\Gamma(U,TM)$ 中一个元素。

定理 6.1

设 X 为局部单参数变换群 $\{\phi_t\}_t$ 诱导的切向量场，那么

- $\forall\phi_t$，$(\phi_t)_*X=X$
- 局部单参数变换群的轨道均为向量场 X 的积分曲线。

定理 6.2

设 $X\in\Gamma(M,TM)$，那么 $\forall p\in M$，$\exists p\in V\subseteq M$ 以及 $V\to M$ 的局部单参数变换群 $\{\phi_t\}_t$，使得在 V 上，X 为由 $\{\phi_t\}_t$ 诱导的切向量场(同时 $\{\phi_t\}_t$ 的轨道为 X 的积分曲线，此时称 X 为局部单参数变换群 $\{\phi_t\}_t$ 的**无穷小生成元**)。

推论 6.1

设 M 紧流形，$X\in\Gamma M,TM$，那么 X 在 M 上生成单参数变换群，即由前述定理保证的在 $(-\varepsilon,\varepsilon)\times M$ 上定义的 $\{\phi_t\}_t$ 在 $\mathbb{R}\times M$ 上也存在。

定理 6.3

$\{\phi_t\}_t\subseteq C^\infty(M,M)$ 为 M 上单参数变换群，X 为 $\{\phi_t\}_t$ 诱导的切向量场，若 $f:M\to M$ 为微分同胚，那么 f_*X 为单参数变换群 $\{f\circ\phi_t\circ f^{-1}\}_t$ 诱导的切向量场。

推论 6.2

向量场 X 在微分同胚 $f:M\to M$ 下不变当且仅当 X 生成的局部单参数变换群 $\{\phi_t\}_t$ 与 f 可交换(即 $\forall t,\phi_t\circ f=f\circ\phi_t$)

推论 6.3

设 $X,Y\in\Gamma(M,TM)$ 对应的局部单参数变换群 $\{\phi_t\}_t$，$\{\psi_s\}_s$。那么 $\forall s,t,s+t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$，$\phi_t\psi_s=\psi_s\phi_t$ 当且仅当 $[X,Y]=0$。

定理 6.4

设 $X, Y \in \Gamma(M, TM)$，$\{\phi_t\}_t$ 为由 X 生成的局部单参数变换群，定义

$$L_X Y = \lim_{t \to 0} \frac{(\phi_t)_* Y - Y}{t}$$

为李导数，那么 $L_X Y = [X, Y] \in \Gamma(M, TM)$。

定义 6.3

一个 **r 维分布** D 为 $\bigsqcup_{p \in M} D_p$，其中 $D_p \subseteq T_p M$ 为 r 维子空间，使 D 构成 TM 的一个子向量丛。

若 $\forall p \in M$，$\exists p \in U \subseteq M$ 以及 $X_1, \cdots, X_r \in \Gamma(M, TM)$ 使得 $\forall q \in U$，$X_1(q), \cdots, X_r(q)$ 为 D_q 的一组基，则称 $X_1, \cdots, X_r$ 在 U 上**生成**分布 D。

定理 6.5 (Frobenius第一可积性定理)

设 U 是 m 维光滑流形上的开集，$X_1, \cdots, X_l$ 是 U 上的处处线性无关的光滑切向量场，$l \leq m$，则存在局部坐标$(t^1, \cdots, t^m)$ 使得

$$X_i = \frac{\partial}{\partial t^i} (1 \leq i \leq l)$$

当且仅当 $[X_i, X_j] = 0, 1 \leq i, j \leq l$。

7 微分形式及流形上的积分

约定 V 为 n 维实线性空间，如果映射 $f : V \to \mathbb{R}$ 满足

$$f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v), \forall u, v \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

则称 f 是 V 上的一个**线性泛函**。用 V^* 表示 V 上所有线性泛函的集合，则不难验证 V^* 为线性空间，称为 V 的**对偶空间**。

定理 7.1

$\dim V^* = \dim V = n$。

证明. 设 $\{e^1, \cdots, e^n\}$ 是 V 的一组基，则对任意 $v \in V$ 可以写成 $v = \sum_{i=1}^n v^i e^i$，取 $f^i(v) = v^i$，易验证 $\{f^1, \cdots, f^n\}$ 线性无关且为 V^* 的一组基。 □

证明中的 $\{f^1, \cdots, f^n\}$ 称为 $\{e^1, \cdots, e^n\}$ 的**对偶基**。

考虑 V 中基的线性变换，线性代数中的知识告诉我们对应的坐标变换是相反的，我们称 V 中的向量为**反协变向量**。同理我们有 V^* 中向量的变换方法与对偶基的变换相反，因此与原来的基变换相同，我们称 V^* 中的向量为**协变向量**。

定义 7.1

对线性空间 V, W，定义**张量积** $V \otimes W = \langle V \times W \rangle / \sim$，其中 $\sim$ 定义如下：

$$(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w) \sim \lambda_1(v_1, w) + \lambda_2(v_2, w), (v, \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2) \sim \mu_1(v, w_1) + \mu_2(v, w_2)$$

$[(v, w)]$ 记作 $v \otimes w$。

命题 7.1

$\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V^{\otimes r}, \mathbb{R}) \cong (V^*)^{\otimes r}$

定义 7.2

一个 (r, s) **型张量**为一个线性函数 $V \otimes \cdots \otimes V \times V^* \otimes \cdots \otimes V^* \to \mathbb{R}$，其中有 r 个 V，s 个 V^*。称 $(r, 0)$ 型张量为 $r-$协变张量，$(0, s)$ 型张量为 $s-$反协变张量。

定义 7.3

定义**对称向量**与**反对称张量**为：

$$\mathrm{Sym}^{\otimes m} V^* = \left\{\varphi \in (V^*)^{\otimes m} \middle| \forall v_1, \cdots, v_m \in V, \sigma \in S_m, \varphi(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(n)}) = \varphi(v_1, \cdots, v_m)\right\}$$

$$\Lambda^m V^* = \left\{\varphi \in (V^*)^{\otimes m} \middle| \forall v_1, \cdots, v_m \in V, \sigma \in S_m, \varphi(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(n)}) = (-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)} \varphi(v_1, \cdots, v_m)\right\}$$

命题 7.2

$\dim V^* = n$，则 $\dim \Lambda^m V^* = \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$

证明. 取 V^* 的一组基 $w_1, \cdots, w_n$，验证

$$\Lambda^m V^* = \mathrm{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \sum_{\sigma \in S(i_1, \cdots, i_m)} (-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)} w^{\sigma(i_1)} \otimes \cdots \otimes w^{\sigma(i_m)} \right\}$$

这样的张量刚好 $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$ 个 □

我们记

$$w^{i_1} \wedge \cdots \wedge w^{i_m} = \sum_{\sigma \in S(i_1, \cdots, i_m)} (-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)} w^{\sigma(i_1)} \otimes \cdots \otimes w^{\sigma(i_m)}$$

，为 $w^{\sigma(i_1)} \otimes \cdots \otimes w^{\sigma(i_m)}$ 的反对称化。

定义 7.4

$\wedge : \wedge^p V^* \otimes \wedge^q V^* \to \wedge^{p+q} V^*, \alpha \otimes \beta \mapsto \alpha \otimes \beta$的反对称化

命题 7.3

$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha$

$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$

定义 7.5

设 M 是微分流形，称 M 上一个微分 r 形式为向量丛 $\wedge^r T^*M$ 的光滑截面，此时称 $\wedge^r T^*M$ 为 r **次微分形式丛**。类似定义 $\Gamma(M, (T^*M)^{\otimes r} \otimes (TM)^{\otimes s})$ 中的元素为流形 M 上 (r, s) 型张量场。

下面我们来定义外微分 d：

定义 7.6

称 $\mathrm{d} : \Gamma(M, \wedge^r T^*M) \to \Gamma(M, \wedge^{r+1} T^*M)$ 为**外微分**，若 d 满足：

- d 线性。
- $\forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R}), \mathrm{d}f \in \Gamma(M, \wedge^1 T^*M)$ 由 $\mathrm{d}f(X) = X(f) \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ 指定且 $\mathrm{d}(\mathrm{d}f) = 0$。
- d 满足 Leibniz 法则，$\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = \mathrm{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^{|\alpha|} \alpha \wedge \mathrm{d}\beta$

记 $\Gamma(M, \wedge^r T^*M) = A^r(M)$，$(A(M) = \oplus_{t=0}^n A^r(M), \wedge, \mathrm{d})$ 称为**微分分次代数(differential graded algebra)**。

引理 7.1

外微分算子 d 若存在，则为局部算子。

即若 $\alpha, \beta \in A(M)$，则存在 U 使得：若有 $\alpha\big|_U = \beta\big|_U$ 则有 $(\mathrm{d}\alpha)\big|_U = (\mathrm{d}\beta)\big|_U$

证明. 略。 □

定理 7.2

d 存在且唯一。

证明. 略。 □

定理 7.3

$\mathrm{d}^2 = 0$。

这表明 d 有某种正合性质。

首先我们有 $\mathrm{Im}(\mathrm{d} : A^r(M) \to A^{r+1}(M)) \subseteq \mathrm{Ker}(\mathrm{d} : A^{r+1}(M) \to A^{r+2}(M))$，但我们不一定有反过来的包含关系，具有一定的拓扑障碍。

定理 7.4 (Cartan)

$w \in A^r(M)$，那么 $\forall X_0, X_1, \cdots, X_r$，

$$\begin{aligned} \mathrm{d}w(X_0, \cdots, X_r) = &\sum_{i=0}^{r}(-1)^i X_i(w(X_1, \cdot, \check{X}_i, \cdots, X_r)) \\ &+ \sum_{i<j}(-1)^{i+j} w([X_i, X_j], X_1, \cdots, \check{X}_i, \cdots, \check{X}_j \cdots, X_r) \end{aligned}$$

定义 7.7

设 M 是微分流形，$w \in A^r(M)$，若 $\mathrm{d}w = 0$，称 w 为**闭形式(closed)**，若存在 $\sigma \in A^{r+1}(M)$，$w = \mathrm{d}\sigma$，称 w 为**恰当形式(exact)**。若 $\forall p \in M$，存在 $p \in U$，$w\big|_U = \mathrm{d}\sigma$，则称为**局部恰当**。

闭形式推不出恰当。考虑 $M = S^1$，$\omega = \mathrm{d}\theta$。

定理 7.5 (Poincare引理)

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 中包含 0 点的星形开集，则在 Ω 上任一闭形式都是恰当的。

证明. 之后补。 □

定义 7.8

$F : M \to N$ 光滑映射。定义：

$$\begin{aligned} F^* : A^r(M) &\to A^r(N) \\ f &\mapsto F^* \cdot f = f \circ F \\ \omega &\mapsto F^*\omega((X_1, \cdots, X_r) \mapsto \omega(F_*X_1, \cdots, F_*X_r)) \end{aligned}$$

定理 7.6

$F^* : A^r(N) \to A^r(M)$ 满足：

- 线性。
- $F^*(\alpha \wedge \beta) = F^*\alpha \wedge F^*\beta$。
- $dF^* = F^* \circ d$。

证明. (1)：线性性显然。

(2)：由 F^* 线性以及 $F^*(\alpha \otimes \beta) = F^*\alpha \otimes F^*\beta$ 知 F^* 保持反对称化。

(3)：对 $\omega \in A^0(M)$，即 $\omega = f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$。

$$(F^* \circ \mathrm{d}f)(X) = \mathrm{d}f(F_*X) = (F_*X)(f) = X(f \circ F) = X(F^*f) = (\mathrm{d}F^*f)(X)$$

设 $\omega = f\mathrm{d}g$，$f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$。

$$\begin{aligned} F^*\mathrm{d}\omega &= F^*\mathrm{d}(f\mathrm{d}g) = F^*(\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}g) = F^*(\mathrm{d}f) \wedge F^*(\mathrm{d}g) \\ &= \mathrm{d}F^*f \wedge F^*\mathrm{d}g = \mathrm{d}(F^*f \wedge F^*\mathrm{d}g) = \mathrm{d}F^*(f \wedge \mathrm{d}g) = \mathrm{d}F^*\omega \end{aligned}$$

对一般的 ω，由 d, F^* 的线性性，只需考虑 $\omega = \omega_1 \wedge \omega_2$，其中 ω_1 为 1−形式，利用归纳法即证。 □

定义 7.9

设 $X \in \Gamma(M, TM)$，定义**内积(interior product)** i_X：

$$\begin{aligned} i_X : A^r(M) &\to A^{r-1}(M) \\ \omega \mapsto i_X\omega : (X_2, \cdots, X_r) &\mapsto \begin{cases} 0 & , r = 0 \\ \omega(X, X_2, \cdots, X_r) & , r \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

回忆 $L_X\omega = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \phi_t^*\omega$，其中 $\{\phi_t\}_t$ 为由 X 诱导的局部单参数变换群。对 $A(M)$ 上的线性映射 $A : A^{r_1}(M) \to A^{r_2}(M)$，定义 A 的次数为 $r_2 - r_1$。

命题 7.4

- i_X 满足分次 Leibniz 法则：

$$i_X(\alpha \wedge \beta) = i_X\alpha \wedge \beta + (-1)^{|\alpha|}\alpha \wedge i_X\beta$$

- 设 A, B 为 $A(M)$ 上的线性映射，若 A, B 满足分次 Leibniz，且 A, B 的次数为奇，则 $AB + BA$ 也满足 Leibniz；若 A 满足分次 Leibniz，B 满足 Leibniz 且 B 次数为偶，则 $AB - BA$ 满足分次 Leibniz.
- 若 $A : A(M) \to A(M)$ 线性且满足分次 Leibniz 法则，那么 A 在 $A(M)$ 的作用完全由 $A^0(M)$ 上的作用确定。

证明. 下次补。 □

我们现在有：

- $\mathrm{d} : A^r(M) \to A^{r+1}(M)$
- $i_X : A^r(M) \to A^{r-1}(M)$
- $L_X : A^r(M) \to A^r(M)$

命题 7.5

- $L_x \circ \mathrm{d} = \mathrm{d} \circ L_x$
- $L_x = \mathrm{d} \circ i_X + i_X \circ \mathrm{d}$
- $L_x \circ i_Y - i_Y \circ L_X = i_{[X,Y]}$
- $X(\omega(y_1, \cdots, y_r)) = (L_x\omega)(y_1, \cdots, y_r) + \sum_{k=1}^{r} \omega(y_1, \cdots, L_X y_k, \cdots, y_r)$

证明. 下次补。 □

8 微分形式的应用

定义 8.1 (分布的 Phaff 形式)

设 D 为一个 r 维分布，设局部存在 $\theta_a, a = 1, 2, \cdots, n-r \in A^1(\text{局部})$，使得在局部上

$$D = \bigcap_{a=1}^{n-r} \ker \theta_a$$

则称 $\theta_k = 0, k = 1, \cdots, n-r$ 为 D 的 **Phaff 形式**，并称 θ_k 为 **Phaffian**。

定理 8.1 (Frobenius 定理)

如下命题等价：

- D 局部存在 r 维正则积分流形。
- D 对合，即 $\forall X_a, X_b, a, b = 1, 2, \cdots, r, [X_a, X_b] \in \Gamma(\text{局部}, D)$。
- $\mathrm{d}\theta_a\big|_D = 0$，即 $\forall X, Y \in \Gamma(\text{局部}, D)$，$\mathrm{d}\theta_a(X, Y) = 0$。
- $\exists \lambda_{ab} \in A^1(\text{局部})$，
$$\mathrm{d}\theta_a = \sum_{b=1}^{n-r} \lambda_{ab}\theta_b$$
- $\mathrm{d}\theta_a \wedge (\theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_{n-r}) = 0 \in A^{n-r+2}(\text{局部}), \forall a = 1, 2, \cdots, n-r$

证明. (1) $\Longleftrightarrow$ (2)：这是经典的 Frobenius 定理。

(2) $\Longrightarrow$ (3)：$\mathrm{d}\theta_a(X, Y) = X(\theta_a(Y)) - Y(\theta_a(X)) - \theta_a([X, Y]) = 0$。

(3) $\Longrightarrow$ (2)：$\forall X, Y \in D$，$\mathrm{d}\theta_a(X, Y) = 0$，那么

$$0 = \mathrm{d}\theta_a(X, Y) = 0 - 0 - \theta_a([X, Y])$$

这表明 $[X, Y] \in \ker \theta_a, \forall a = 1, 2, \cdots, n-r$，故 $[X, Y] \in D = \bigcap_{a=1}^{n-r} \ker \theta_a$。

(4) $\Longrightarrow$ (3)：$(\mathrm{d}\theta_a)(X, Y) = (\lambda_{ab} \wedge \theta_b)(X, Y) = \lambda_{ab}(X)\theta_b(Y) - \theta_b(X)\lambda_{ab}(Y) = 0$

(3) $\Longrightarrow$ (4)：考虑局部地将 $\theta_a, a=1,2,\cdots,n-r$ 扩充为 T^*M 的基。

$$\begin{array}{ccccccccc} & \theta_1 & \cdots & \theta_{n-r} & \theta_{n-r+1} & \cdots & \theta_n & & T^*M\text{的局部基} \\ \text{对偶基} & e_1 & \cdots & e_{n-r} & e_{n-r+1} & \cdots & e_n & & TM\text{的局部基} \end{array}$$

任一个 2−形式 ω 局部可表示为

$$\omega = \sum_{1\leq b\leq n-r} \lambda_{ab}\wedge\theta_b + \sum_{n-r+1\leq a<b\leq n} \mu_{ab}\theta_a\wedge\theta_b$$

特别的，

$$\mathrm{d}\theta_a = \sum_{1\leq b\leq n-r} \lambda_{ab}\wedge\theta_b + \sum_{n-r+1\leq b<c\leq n} \mu_{bc}\theta_b\wedge\theta_c, \forall a=1,2,\cdots,n-r$$

具体的看 $\forall X,Y\in D$，

$$\mathrm{d}\theta_a(X,Y) = \sum_{1\leq b\leq n-1} \lambda_{ab}\wedge\theta_b(X,Y) + \sum_{n-r+1\leq b<c\leq n} \mu_{bc}\theta_b\wedge\theta_c(X,Y)$$

。取 X,Y 为 $e_b,e_c\in D$，得 $\mathrm{d}\theta_a(e_b,e_c)=\mu_{bc}\cdot 1$，故 $\mu_{bc}=0$。

(4) $\Longrightarrow$ (5)：$\mathrm{d}\theta_a=\sum_{1\leq b\leq n-r}\lambda_{ab}\wedge\theta_b$，显然 $\mathrm{d}\theta_a\wedge(\theta_1\wedge\cdots\wedge\theta_{n-r})=0$。

(5) $\Longrightarrow$ (4)：$\mathrm{d}\theta_a\wedge(\theta_1\wedge\cdots\wedge\theta_{n-r}) = (\sum\lambda_{ab}\wedge\theta_b+\sum\mu_{ab}\theta_b\wedge\theta_c)\wedge(\theta_1\wedge\cdots\wedge\theta_{n-r})$。由 $\theta_{n-r+1}\cdots\theta_n$ 的构造 $\theta_b\wedge\theta_c\wedge\theta_1\wedge\cdots\wedge\theta_{n-r}$ 局部为 A^{n-r+2} 的一部分，从而线性独立，故 $\mu_{bc}=0,\forall b,c$。 □

9 微分形式在物理中的应用

本节中，我们将**通过习题的形式**，利用微分形式的语言，理解热力学定律。

考虑一个带有 n 个封闭密室的热力学系统,密室中有理想气体，密室间由透热隔膜隔开。隔膜能传递热量但不能传递物质。对于第 i 个封闭密室，平衡态下有如下的理想气体状态方程

$$p_iv_i = n_iR_iT_i,\ i=1,2,\cdots,n,$$

这里 p_i,v_i,n_i,R_i,T_i 分别代表压强，体积，物质的量，气体常数，温度。热平衡态下所有密室的温度均相同, 故整个系统的独立参数取值为一个 $(n+1)$ 维流形 M ，局部坐标函数可取为 $T,v_1,\cdots,v_n$。流形 M 局部为欧氏空间的开集，但是整体的拓扑可能很复杂。

系统的内能 U 定义为一个关于仅与 T 有关的整体定义的函数 $U\in A^0(M)$ ，且函数 $T\mapsto U(T)$ 局部为微分同胚。因此流形 M 的局部坐标可取为 $v_0 := U,v_1,\cdots,v_n$。

一个准静态过程(每个瞬间都是热平衡态)为 M 上一条光滑道路 γ ，连接起点和终点的两个状态。非准静态过程可能包含不光滑甚至不连续的道路。

热力学的几大定律表示如下：

- 热力学第0定律：热平衡(作为密室间的关系)具有传递性。
- 热力学第1定律：能量守恒。

- 热力学第2定律：熵增原理：熵总是不减的。或等价地,一个准静态过程的热/功效率不能达到100%。
- 热力学第3定律：绝对零度不可达到。

Problem 9.1

功形式(work form)和热形式(heat form)为 M 上的微分形式 $\mathcal{W}\in A^1(M),\mathcal{Q}\in A^1(M)$，且物理学假设 $\mathcal{Q}$ 处处非零。局部坐标系下有

$$\mathcal{W}=\sum_{i=1}^{n}p_i(U,v_1,\cdots,v_n)\,dv_i,\ \mathcal{Q}=\sum_{i=0}^{n}Q_i(U,v_1,\cdots,v_n)\,dv_i.$$

热力学第1定律为

$$\mathcal{Q}-\mathcal{W}=dU$$

设 M 的某区域 D 同胚于 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的开球，考虑位于 D 中的光滑道路。对于怎样的 $\mathcal{W},\mathcal{Q}$，线积分 $\int_\gamma\mathcal{W},\int_\gamma\mathcal{Q}$ 仅依赖于光滑道路的起点和终点,而不依赖于位于 D 之中的光滑道路 γ 的选取。

Problem 9.2

考虑局部投影映射 $p:(v_0,v_1,\cdots,v_n)\mapsto(v_1,\cdots,v_n)$。物理学假设存在一个 n 维流形 V 和映射 $\pi:M\to V$ 使得 π 为淹没,且对任意 $v\in V,\pi^{-1}(v)$ 连通，且局部 p 在复合值域上的一个局部微分同胚之

后 p 和 π 相同。我们将流形 V 上的局部坐标记为 $v=(v^1,\cdots,v^n)$。

证明对任意 $v\in V,\pi^{-1}(v)$ 为一个 1 维流形。包含于 $\pi^{-1}(V)$ 中的光滑道路 γ 被称为是等容过程。这里我们为了叙述上简单起见，假设 γ 为嵌入映射，并在记号上将 $\operatorname{im}\gamma$ 与 γ 写成一样。

证明对于等容过程，$\mathcal{W}^1|_\gamma=0\in A^1(\gamma),dU|_\gamma\neq0\in A^1(\gamma)$，进而说明 U 为 $\pi^{-1}(v)$ 上的整体定义的坐标函数。

Problem 9.3

称一个准静态过程为准静态绝热过程，若相应的光滑道路 γ 满足 $\mathcal{Q}|_\gamma=0\in A^1(\gamma)$。

热力学第2定律的Kevin表述为：不存在一个准静态循环过程使得热量完全被转化成了机械能. 利用道路的语言,即不存在具有同样起点终点的光滑道路 γ_1,γ_2 使得

$$\int_{\gamma_2}\mathcal{W}=\int_{\gamma_1}\mathcal{Q}$$

热力学第2定律的Caratheodory表述为：对于任一点 $p\in M$ 均存在一个点 $q\in M$ 使得 q 不能通过 p 由准静态绝热过程实现。利用道路的语言，即对于任一点 $p\in M$ 均存在一个点 $q\in M$，使得不存在连接 p 至 q 的光滑道路 γ 使得

$$\mathcal{Q}|_\gamma=0\in A^1(\gamma).$$

证明 Kevin 表述可以推出 Caratheodory 表述。

Problem 9.4

数学上有如下的 Caratheodory 定理：设 m 维流形 M 上的 $\theta \in A^1(M)$ 定义的 $m-1$ 维分布 $\ker\theta = D$ 不是完全可积的，即存在 $p \in M$ 使得 $(d\theta \wedge \theta)|_p \neq 0$ 。那么存在 p 的邻域 B 使得 B 中的任意一点 q 均可以通过分段光滑的积分曲线与 p 连接 (从而分段光滑的积分流形维数大于分布 D 的维数)。
那么热力学第2定律的 Caratheodory 表述可以大致叙述为 $\mathcal{Q}$ 定义的分布 $\ker\mathcal{Q}$ 是完全可积的。
不利用 Caratheodory 定理，直接说明当系统中仅有一个密室时，$\ker\mathcal{Q}$ 确实是完全可积的。

Problem 9.5

利用 Frobenius 定理知对于完全可积的分布 $\ker\mathcal{Q}_r$ 局部存在正则的积分流形 W 使得在 M 的某个局部坐标系 $x^1, \cdots x^n, x^0$ 下，W 局部由正则子流形 $x^0 = c^0$ 给出。此时在 M 上局部存在函数 f ，使得局部有 $Q = f dx^0$ 。
物理学假设存在整体函数 $\mathrm{T}, \mathrm{S} \in A^0(M)$ 使得 $\mathcal{Q} = \mathrm{T} d\,\mathrm{S}$ ；函数 S 还满足对于等容过程有 $\mathrm{S}|_{\pi^{-1}(v)} = U$ 。称T为绝对温度，S为熵。
基于前面的热力学第0，1，2定律的微分形式表述和物理学假设，说明函数T满足 $\mathrm{T} > 0$ 。
说明对于准静态绝热过程 γ, S 是不变的。

10 de Rham 上同调群

定义 10.1

设 M 是流形，由于 $\mathrm{d} : A^r(M) \to A^{r+1}(M)$ 是线性的，其 ker 与 Im 也自然线性，定义：

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}^r(M) &= \operatorname{Ker}\left(\mathrm{d} : A^r(M) \to A^{r+1}(M)\right) = \{\text{ closed } r\text{-forms on } M\},\\
\mathcal{B}^r(M) &= \operatorname{Im}\left(\mathrm{d} : A^{r-1}(M) \to A^r(M)\right) = \{\text{ exact } r\text{-forms on } M\}.
\end{aligned}$$

这里我们约定，当 $r < 0$ 或 $r > n = \dim M$ 时，$A^r(M)$ 是零空间，故 $\mathcal{B}^0(M) = 0$，$\mathcal{Z}^n(M) = A^r(M)$。
注意到任意恰当形式均为闭形式，$\mathcal{B}^r(M) \subseteq \mathcal{Z}^r(M)$，这表明可以定义如下商空间：

$$H^r_{\mathrm{dR}}(M) = \frac{\mathcal{Z}^r(M)}{\mathcal{B}^r(M)}$$

称为 M 的 **de Rham 上同调群**。

11 流形上的微积分

接下来我们来考虑流形上的定向、流形上的积分、带边流形上的积分，介绍 Stokes 定理与高斯绝妙定理。

先来看看在线性空间中我们是如何定向的：

定义 11.1 (线性空间的定向)

设 V 是一个 n 维线性空间，$f=(f_1,\cdots,f_n)$ 为 V 的一个**标架(frame)**/基(这里称之为标架而不是基意在强调这是一个给定序的基)，称 $\{V\text{上的标架}\}/\sim$ 中一个元素为 V 上一个定向，其中 $f\sim\tilde{f}\Longleftrightarrow\exists P\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$，$\tilde{f}=f\cdot P$，$\det P>0$

V 上有且仅有两个定向：$[f=(f_1,\cdots,f_n)],[(f_2,f_1,\cdots,f_n)]$。

等价的，我们借助微分形式描述定向：$(\wedge^n V^*-\{0\})/\sim$ 为 V 上一个定向，其中 $\Omega\sim\tilde{\Omega}\Longleftrightarrow\exists\lambda>0$，$\tilde{\Omega}=\lambda\Omega$。

接下来我们来看流形上的定向：

定义 11.2 (流形上的定向)

称 M **可定向(orientable)**，若存在 $\{(V_\alpha,\psi_\alpha,y_\alpha)\}_\alpha$，其中在 V_α 上有 $\Gamma(V_\alpha,TM)$ 之标架 $f_\alpha=(f_{\alpha,1},\cdots,f_{\alpha,n})$，在 $V_\alpha\cap V_\beta$ 上，存在可逆 $P_{\beta\alpha}$ 使得 $f_\alpha=f_\beta P_{\beta\alpha}^{-1}$，$\det P_{\beta\alpha}^{-1}>0$，同样定义 $\sim$，称 $\{(f_\alpha)_\alpha\}/\sim$ 中一个元素为流形 M 上一个定向。

命题 11.1

$$\begin{aligned}
&\text{存在 }\{(V_\alpha,\psi_\alpha,y_\alpha)\}_\alpha\text{ 满足 }\det P_{\beta\alpha}^{-1}>0\\
\Longleftrightarrow&\text{存在 }\{(V_\alpha,\psi_\alpha,z_\alpha)\}_\alpha\text{ 满足}\frac{\partial}{\partial z^\alpha}=\frac{\partial}{\partial z^\beta}J_{\beta\alpha}^{-1},\det J_{\beta\alpha}^{-1}\\
\Longleftrightarrow&\text{存在 }\{(V_\alpha,\psi_\alpha,z_\alpha)\}_\alpha,\Omega_\alpha\in\Gamma(V_\alpha,\wedge^nT^*M)\text{使得}\Omega_\alpha=\lambda_{\beta\alpha}\Omega_\beta,\lambda_{\beta\alpha}>0\\
\Longleftrightarrow&\text{存在}\Omega\in\Gamma(M,\wedge^nT^*M)\text{处处非零，称为}\textbf{体积形式(Volume form)}
\end{aligned}$$

下面我们介绍流形上可定向图册的构造方式，这同时可判断可定向图册的存在性：取流形上的 C^∞ 局部坐标图册，$\{(U_\alpha,\varphi_\alpha,x_\alpha)\}_\alpha$，考虑函数族 $\left\{\det J_{\beta\alpha}^{-1}\right\}_{\alpha,\beta}$

- 若 $\forall\alpha,\beta$，$\det J_{\beta\alpha}^{-1}>0$，那么 $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha,x_\alpha)\}_\alpha$ 自动为可定向图册。
- 若上述条件不满足，考虑在 $x_\alpha=(x_\alpha^1,\cdots,x_\alpha^n)$ 上调整顺序，得 $z_\alpha=(z_\alpha^1,\cdots,z_\alpha^n)$ 使得 $\{(U_\alpha,\tilde{\varphi}_\alpha,z_\alpha)\}_\alpha$ 为可定向图册，则

$$\det\left(\frac{\partial z_\beta}{\partial z_\alpha}\right)>0\Longleftrightarrow\det\left(\frac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha}\right)O_\beta O_\alpha^{-1}>0,\forall\alpha,\beta$$

其中 $O_\alpha=\det\left(\frac{\partial z_\alpha}{\partial x_\alpha}\right)\in\{\pm1\}$。

则可定向图册 $\{(U_\alpha,\tilde{\varphi}_\alpha,z_\alpha)\}_\alpha$ 存在 $\Longleftrightarrow$ 关于 $\{O_\alpha:U_\alpha\to\{\pm1\}\}_\alpha$ 的方程

$$\det\left(\frac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha}\right)O_\beta O_\alpha^{-1}>0,\forall\alpha,\beta$$

有解。

下面我们看一些自然的可定向流形的构造：

- 辛流形：$\omega\in A^2(M)$，$d\omega=0$ 非退化 $\Longrightarrow\omega^n$ 为体积形式。
- 复流形：局部同胚 $\mathbb{C}^n$ $\left(\left(\frac{\partial}{\partial z^\beta},\frac{\partial}{\partial\bar{z}^\beta}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial z^\alpha},\frac{\partial}{\partial\bar{z}^\alpha}\right)\cdot P_{\beta\alpha}^{-1}\text{自动满足}\det P_{\beta\alpha}^{-1}\right)$

注：n 维复流形 X 上是否存在一个处处非零的全纯微分 $n-$形式 $\Longleftrightarrow C_1(X)=0$，读者可自行尝试证明。

- Riemann manifold：我们将在下面详细说明。

我们首先来定义一个度量：

定义 11.3

流形 M 上一个度量为一个 $(0,2)$型张量

$$g=\mathrm{d}s^2\in\Gamma(M,\mathrm{Sym}^{\otimes 2}T^*M):\Gamma(M,TM)\otimes\Gamma(M,TM)\to C^\infty(M,\mathbb{R})$$

且满足

- 对称。
- 正定：$\left.g\right|_p(X_p,X_p)\geq 0$ 且取等仅当 $X_p=0\in T_pM$
- 双线性：

$$\begin{aligned}\left.g\right|_p(\lambda_1X_p+\lambda_2Y_p,\mu_1Z_p+\mu_2W_p)=&\lambda_1\mu_1\left.g\right|_p(X_p,Z_p)+\lambda_1\mu_2\left.g\right|_p(X_p,W_p)\\&+\lambda_2\mu_1\left.g\right|_p(Y_p,Z_p)+\lambda_2\mu_2\left.g\right|_p(Y_p,W_p)\end{aligned}$$

此时称 $(M,g=\mathrm{d}s^2)$ 为一个 Riemann 流形。

注意，局部在 (U,φ,x) 下，

$$\left.g\right|_U=\sum_{i,j}g_{ij}(x)\mathrm{d}x^i\otimes\mathrm{d}x^j$$

通过度量可以定义 $n-$形式：

定义 11.4

设 $g=\mathrm{d}s^2$ 为 M 上一个度量，

$$\mathrm{Vol}_g:=\left\{\sqrt{\det g_{\alpha,ij}(x)}\mathrm{d}x_\alpha^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_\alpha^n\right\}_\alpha$$

命题 11.2

当 $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha,x_\alpha)\}_\alpha$ 为可定向图册时，Vol_g 良定且给出处处非 0 的 $n-$形式。

证明. 在 $U_\alpha\cap U_\beta$ 中，

$$\mathrm{d}x_\beta^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_\beta^n=\det\left(\frac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha}\right)\mathrm{d}x_\alpha^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_\alpha^n$$

$$g_{\beta,\tilde{i}\tilde{j}}(x)=g_{\alpha,ij}(x)\cdot\frac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_\beta^{\tilde{i}}}\cdot\frac{\partial x_\alpha^j}{\partial x_\beta^{\tilde{j}}}$$

$$\det\left(g_{\beta,\tilde{i}\tilde{j}}(x)\right)=\det\left(g_{\alpha,ij}(x)\right)\cdot\det\left(\frac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_\beta^{\tilde{i}}}\right)\cdot\det\left(\frac{\partial x_\alpha^j}{\partial x_\beta^{\tilde{j}}}\right)$$

$$\Longrightarrow\sqrt{\det\left(g_{\beta,\tilde{i}\tilde{j}}(x)\right)}\mathrm{d}x_\beta^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_\beta^n=\left|\det\left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\beta}\right)\right|\cdot\det\left(\frac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha}\right)\sqrt{\det\left(g_{\alpha,ij}(x)\right)}\mathrm{d}x_\alpha^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_\alpha^n$$

当 $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha,x_\alpha)\}_\alpha$ 为可定向图册时，

$$\det\left(\frac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha}\right)>0$$

故 Vol_g 良定，$\sqrt{\det\left(g_{\alpha,ij}(x)\right)}>0\Longrightarrow$ 其处处非零。 □

当 $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha,x_\alpha)\}_\alpha$ 是否为定向图册未知时，通过构造

$$O_\alpha:U_\alpha\to\{\pm1\}$$

以及

$$\left\{O_\alpha\sqrt{\det\left(g_{\alpha,ij}\right)}\mathrm{d}x_\alpha^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_\alpha^n\right\}$$

来构造良定且处处非零的 $n-$形式。

注意！度量的定义不需要定向/可定向图册，但由度量诱导良定的体积形式通常将一个可定向流形上的某局部图册 $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha,x_\alpha)\}_\alpha$ 的体积形式写为 $\left\{O_\alpha\sqrt{\det g_{\alpha,ij}(x)}\mathrm{d}x_\alpha^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_\alpha^n\right\}$

接下来我们考虑流形上的积分。回忆我们在分析中所学的，在欧氏空间中，我们将积分定义成 Riemann 可积。而利用局部平凡化映射，我们可以将流形局部的积分定义为相应的欧氏空间上的积分，这可以由“变量替换”表述，再利用单位分解将局部拼成整体。

引理 11.1 (开区域 $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ 上积分变量替换)

设 Ω_1,Ω_2 为 $\mathbb{R}^n$ 上开区域(开集，无边)，$\phi:\Omega_1\to\Omega_2$ 是微分同胚，$f\in C^\infty(\Omega_2,\mathbb{R})$ 且 $\mathrm{supp}f=\left\{x_2\in\Omega_2\middle|f(x_2)\neq0\right\}$ 紧，那么

$$\int_{\Omega_2}f(y)\mathrm{d}y^1\cdots\mathrm{d}y^n=\int_{\Omega_1}f\circ\phi(x)\cdot\left|\det\frac{\partial y}{\partial x}\right|\cdot\mathrm{d}x^1\cdots\mathrm{d}x^n$$

定义 11.5 (局部的积分)

设 $f\in C^\infty(M,\mathbb{R})$，$\mathrm{supp}f$ 紧，且

$$\mathrm{supp}f\subseteq(U,\varphi,x)$$

定义

$$\begin{aligned}\int_{(M,[\Omega_M])}f(x)\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n&:=\int_{(U,[\Omega_M])}f(x)\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n\\&:=\int_{(\varphi(U),[\Omega_M])}(f\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n)\circ\varphi^{-1}\\(x^k=\pi^k\circ\varphi)&:=\begin{cases}\int_{\varphi(U)}f\circ\varphi^{-1}\mathrm{d}\pi^1\cdots\mathrm{d}\pi^n\text{，}\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n\text{ 与 }\Omega_U\text{ 符号一致}\\-\int_{\varphi(U)}f\circ\varphi^{-1}\mathrm{d}\pi^1\cdots\mathrm{d}\pi^n\text{，}\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n\text{ 与 }\Omega_U\text{ 符号相反}\end{cases}\end{aligned}$$

约定 M 上的定向为 $[\Omega_M]$，所有局部图均与 $[\Omega_M]$ 相容。

命题 11.3 (局部积分的良定性)

设 $f_\alpha|_{U_\alpha\cap U_\beta}$ 在 $U_\alpha\cap U_\beta$ 上具有紧支集，则

$$\int_{(\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta),[\Omega_M])}(f_\alpha \mathrm{d}x_\alpha^1\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x_\alpha^n)\circ\varphi_\alpha^{-1}=\int_{(\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta),[\Omega_M])}(f_\beta \mathrm{d}x_\beta^1\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x_\beta^n)\circ\varphi_\beta^{-1}$$

证明. $f_\alpha|_{U_\alpha\cap U_\beta}$ 具有紧支集，由 $f_\beta=\det\dfrac{\partial x_\alpha}{\partial x_\beta}f_\alpha$，故 $f_\beta|_{U_\alpha\cap U_\beta}$，从而右边有定义。

设微分同胚 $\phi:\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\to\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$，由欧式空间开区域上变量替换：

$$\begin{aligned}
&\int_{(\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta),[\Omega_M])} f_\beta\circ\varphi_\beta^{-1}\cdot(\mathrm{d}x_\beta^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_\beta^n)\circ\varphi_\beta^{-1}\\
=&\int_{\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)} f_\beta\circ\varphi_\beta^{-1}\mathrm{d}\pi_\beta^1\cdots\mathrm{d}\pi_\beta^n\\
(\text{引理})=&\int_{\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)} f_\beta\circ\varphi_\beta^{-1}\circ\phi\cdot\left|\det\frac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha}\right|\cdot\mathrm{d}\pi_\alpha^1\cdots\mathrm{d}\pi_\alpha^n\\
=&\int_{\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)} f_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}\cdot\det\frac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha}\cdot\mathrm{d}\pi_\alpha^1\cdots\mathrm{d}\pi_\alpha^n\\
=&\int_{(\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta),[\Omega_M])}(f_\alpha\mathrm{d}x_\alpha^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_\alpha^n)\circ\varphi_\alpha^{-1}
\end{aligned}$$

□

定义 11.6 (流形上 $n-$形式的积分)

设 $\omega\in A_C^n(M)\triangleq\{$具有紧支集的$n-$形式$\}$，取流形 M 的正则覆盖 $\left\{(U_i,\varphi_i,x_i,U_i^{\frac{1}{2}})\right\}_i$，其与 M 上的定向 $[\Omega_M]$ 相容。作从属于该覆盖的单位分解 $\{\eta_i\}_i$ 使得

$$\begin{cases}\mathrm{supp}\eta_i\subseteq U_i, i=1,2,\cdots,r\\ \eta_i\Big|_{\mathrm{supp}\omega}=0, i\geq r+1\end{cases}$$

定义

$$\int_{(M,[\Omega_M])}\omega:=\sum_i\int_{(U_i,[\Omega_M])}\eta_i\omega$$

我们有

$$\mathrm{supp}(\eta_i\omega)\subseteq\mathrm{supp}\eta_i\cap\mathrm{supp}\omega\begin{cases}\subseteq U_i\cap\mathrm{supp}\omega & ,i=1,2,\cdots,r\\ =0 & ,i\geq r+1\end{cases}$$

命题 11.4

- 正则覆盖单位分解存在。
- 积分不依赖于正则覆盖及从属于其的单位分解的选取。

证明. 之后再补。 □

实际计算中，取可定向图册 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha, x_\alpha)\}_\alpha$，在 U_α 上作局部计算，并利用容斥原理得 $\cup_\alpha U_\alpha = M$ 上的积分结果。

命题 11.5

设 $(M, [\Omega_M]), (N, [\Omega_N])$ 为定向流形，则

- 若微分同胚 $\phi : M \to N$ 保持定向结构($[\phi^*\Omega_N] = [\Omega_M]$)，那么 $\forall \omega \in A_C^n(N)$，

$$\int_{(M,[\Omega_N])} \phi^*\omega = \int_{(N,[\Omega_N])} \omega$$

- $\forall \omega \in A_C^n(M)$，

$$\int_{(N,[\Omega_N])} \omega = (-1) \int_{(M,[\Omega_M])} \omega$$

证明. 显然。 □

下面我们来看带边流形上的积分与 Stokes 定理。在 Riemann 积分中我们定义 $\int_{[a,b]} f(x)dx := \int_{(a,b)} f(x)dx$ 若 f 光滑，以及 $\int_{[a,b]} F'(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ 若 F' 光滑，这可以看成某种定向。

定义 11.7 (平凡空间)

$$\mathbb{R}_+^n = \left\{(x^1, \cdots, x^n) \in \mathbb{R}^n \middle| x^n \geq 0\right\}$$

$$\partial\mathbb{R}_+^n = \{(x^1, \cdots, x^{n-1}, 0) \in \mathbb{R}^n\} \overset{\text{同胚}}{\simeq} \mathbb{R}^{n-1}$$

定义 11.8 (平凡空间的映射)

设 U, V 为 $\mathbb{R}_+^n$ 的开集(即 U, V 为 $\mathbb{R}^n$ 中开集 $\tilde{U}, \tilde{V}$ 与 $\mathbb{R}_+^n$ 之交)，$f : U \to V$ 连续，对 $\forall p \in U$，存在开集 $p \in \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n$，$q = f(p) \in \tilde{V} \subseteq \mathbb{R}^n$，光滑 $F : \tilde{U} \to \tilde{V}$ 满足

$$F\Big|_{U\cap\tilde{U}} = f\Big|_{U\cap\tilde{U}}$$

那么称 $f : U \to V$ **在 p 处光滑**，此时定义 $f'(p) = F'(p)$。
若 $\forall p \in U$，f 在 p 处连续，则称 f **光滑**。

读者可自行验证上述定义与 $F : \tilde{U} \to \tilde{V}$ 的选取无关。

引理 11.2 (平凡空间光滑映射的性质)

- 若开集 $\tilde{W} \to \mathbb{R}^n$，$G : \tilde{W} \to \mathbb{R}^n$ 光滑且 $G|_{\tilde{W}\cap\mathbb{R}_+^n} = 0$，那么 $\forall p \in \tilde{W} \cap \mathbb{R}_+^n$，$G'(p) = 0$。
- 设开集 $U \subseteq \mathbb{R}_+^n$，$f : U \to \mathbb{R}_+^n$ 光滑，若 $p \in U^\circ$，$f(p) \in \partial\mathbb{R}_+^n$，那么 $\forall v \in T_p\mathbb{R}_+^n$，$f'(p)(v) \subseteq \partial\mathbb{R}_+^n \subseteq \mathbb{R}^n = T_{f(p)}\mathbb{R}_+^n$

证明. (1)：当 $p \in (\tilde{W} \cap \mathbb{R}^n_+)^\circ$ 时结论显然。

当 $p \in \partial(\tilde{W} \cap \mathbb{R}^n_+) = \tilde{W} \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ 时，选取序列 $\{p_n\} \subseteq (\tilde{W} \cap \mathbb{R}^n_+)^\circ$，$p_n \to p$，那么 $0 = G'(p_n) \to G'(p)$。

综上 $G'(p) = 0$。

(2)：设 $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为投影映射，那么由于 $\forall x \in U \subseteq \mathbb{R}^n_+$，$\pi \circ f(x) \geq 0$。从而 $0 \leq \pi[f(p+tv)] = \pi[f(p) + f'(p)(tv) + o(tv)]$

令 $t \to 0^+$，$0 \leq (\pi(f'(p)(tv)) + \pi(o(tv)))/t = \pi(f'(p)(v))$，令 $t \to 0^-$ 类似的有 $0 >= \pi(f'(p)(v))$，故 $\pi(f'(p)(v)) = 0$，即 $f'(p)(v) \subseteq \partial\mathbb{R}^n_+$。 □

引理 11.3

设开集 $U, V \subseteq \mathbb{R}^n_+$，$f : U \to V$ 是光滑的微分同胚($F : \tilde{U} \to \tilde{V}$ 的限制)，那么

$$f^\circ := f|_{U^\circ} : U^\circ \to V^\circ$$
$$\partial f := f|_{\partial U} : \partial U \to \partial V$$

均为微分同胚。

证明. 分情况讨论。 □

定义 11.9 (带边流形)

在流形的定义中，以 $\mathbb{R}^n_+$ 或 $\mathbb{R}^n$ 代替 $\mathbb{R}^n$。

若对于 $p \in M$，存在 $p \in (U, \varphi)$ 使 $\varphi(U) \cap \partial\mathbb{R}^n_+ = \emptyset$，那么称 p 为 M 的内点，记 $p \in M^\circ$。否则称 p 为边界点，称 $p \in \partial M$。

注意到 $\partial(\partial M) = \emptyset$ 故 ∂M 为普通意义下的光滑流形。

关于流形的性质可直接推广，仅在正则覆盖 $\{(U_i, \varphi_i, V_i)\}$ 做如下修改：

$$U_i \cap \partial M \neq \emptyset$$
$$\varphi_i(U_i) = B_1(0) \cap \mathbb{R}^n_+$$
$$\varphi_i(V_i) = B_{1/2}(0) \cap \mathbb{R}^n_+$$

注意这里 $\varphi(\partial U) = \varphi(U) \cap \partial\mathbb{R}^n_+ \subseteq \partial\mathbb{R}^n_+$ 是开集。

定理 11.1

设 M 是 n 维带边流形，那么 M 上的微分结构确定了 ∂M 上的一个微分结构，使 ∂M 为 M 的正则子流形，记为 $i : \partial M \to M$。若 M 可定向，则 ∂M 也可定向，且 M 的定向确定的 ∂M 的定向。

证明. 注意到，$\partial\mathbb{R}^n_+$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的正则子流形，且与 $\mathbb{R}^{n-1}$ 微分同胚，对 M 的坐标图 (U, φ)，$\varphi|_{\partial U}(\partial U) = \varphi(U) \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ 为 $\partial\mathbb{R}^n_+$ 中开集。从而 ∂M 的微分结构可由

$$\{(U_\alpha \cap \partial M, \varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap \partial M})\}_\alpha$$

给出，由**引理 11.3** 即得转移函数光滑，从而 ∂M 为 $n-1$ 维微分流形。由

$$\varphi(U\cap\partial M)=\left\{x\in\varphi(U)\middle|x^n=0\right\}$$

得 ∂M 为 M 的正则子流形，下证 M 的定向给出 ∂M 的定向。

设 $(U,\varphi,x),(V,\psi,y)$ 为 M 的含 $p\in\partial M$ 的局部坐标图，且 $\det(\psi\circ\varphi^{-1})'>0$。

由于 $x^n\geq 0,y^n\geq 0$，且由**引理 11.3** 知取等仅当该点$\in\partial M$。故 $\psi\circ\varphi^{-1}$ 局部可表为：

$$\begin{aligned}&y^l=y^k(x^1,\cdots,x^n),1\leq k<n\\&y^n(x^1,\cdots,x^{n-1},0)=0\end{aligned}$$

取 $q\in U\cap V\cap\partial M$，设 $\varphi(q)=(a^1,\cdots,a^{n-1},0)$，

$$\det\left(\left.(\psi\circ\varphi^{-1})\right|_{\varphi(q)}\right)=\left|\begin{matrix}\left(\frac{\partial y^k}{\partial x^l}\right)_{1\leq k,l\leq n-1} & * \\ 0 & \frac{\partial y^n}{\partial x^n}\end{matrix}\right|\Bigg|_{\varphi(q)}$$

考虑函数 $f(t)=y^n(a^1,\cdots,a^{n-1},t),t\geq 0$，那么 $f(t)\geq 0,t\geq 0$，从而

$$\left.\frac{\partial y^n}{\partial x^n}\right|_{\varphi}(q)=f'(0)=\lim_{t\to 0+}\frac{f(t)}{t}\geq 0$$

但 $\det\left(\left.(\psi\circ\varphi^{-1})\right|_{\varphi(q)}\right)>0$ 必须有 $\left.\frac{\partial y^n}{\partial x^n}\right|_{\varphi(q)}>0$，继而 $\det\left(\frac{\partial y^k}{\partial x^l}\right)_{1\leq k,l\leq n-1}>0$，即

$$\begin{aligned}&(U\cap\partial M,\varphi|_{U\cap\partial M},x|_{U\cap\partial M}=(x^1,\cdots,x^{n-1},0))\\&(V\cap\partial M,\psi|_{V\cap\partial M},y|_{V\cap\partial M}=(y^1,\cdots,y^{n-1},0))\end{aligned}$$

定向相容

□

定理 11.2 (Stokes)

设 M 可定向，由 $[\Omega_M]$ 给出，∂M 赋予诱导定向 $\Omega_{\partial M}=i_{N_外}\Omega_M$。设 $\omega\in A_c^{n-1}(M)$，则

$$\int_{(M,[\Omega_M])}\mathrm{d}\omega=\int_{(\partial M,[\Omega_{\partial M}])}\omega$$

证明. 由 $\int$ 的线性性，只需证 supp 包含于 M 上一个可定向图册中某一个局部图 (U,φ,x) 证明。此时设

$$\omega=\sum_{k=1}^n(-1)^k\lambda^k\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\check{x}^k\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n,\lambda^k\in C^\infty(U)$$

则

$$\mathrm{d}\omega=\left(\sum_{k=1}^n\frac{\partial\lambda^k}{\partial x^k}\right)\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n$$

从而

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_U \mathrm{d}\omega = \int_{\varphi(U)} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \lambda^k}{\partial x^k} \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n\right) \circ \varphi^{-1}$$

- $U \cap \partial M = \emptyset$，此时 $\varphi(U)$ 为 $\mathbb{R}^n$，不妨设 $\varphi(U)$ 包含于正方体 $C = \left\{\pi \in \mathbb{R}^n \middle| 0 \leq \pi^k \leq 1\right\}$ 由于 $\mathrm{supp}\omega \subseteq U$ 为紧集，可将 $\lambda^k \circ \varphi^{-1}$ 连续延拓至 C 上，且在 $\varphi(U)$ 之外为 0。

$$\begin{aligned}
&\int_{\varphi(U)} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \lambda^k}{\partial x^k} \mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^n\right) \circ \varphi^{-1} \\
&= \int_C \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \lambda^k}{\partial x^k} \mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^n\right) \circ \varphi^{-1} \\
&= \sum_{k=1}^n \int_C \left(\frac{\partial \lambda^k \circ \varphi^{-1}}{\partial x^k} \mathrm{d}\pi^1 \cdots \mathrm{d}\pi^n\right) \\
&= \sum_{k=1}^n \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left(\lambda^k \circ \varphi^{-1}(\pi^1, \cdots, \pi^n)\right) \Big|_{\pi^k=0}^1 \mathrm{d}\pi^1 \cdots \mathrm{d}\check{\pi}^k \cdots \mathrm{d}\pi^n
\end{aligned}$$

$(\lambda^k\text{在}\partial C\text{上为}0) = 0$

- $U \cap \partial M \neq \emptyset$，同上作 $\varphi(U) \subseteq C^\circ \cup \left\{\pi \in \mathbb{R} \middle| \pi^n = 0\right\}$

$$\begin{aligned}
\int_M \mathrm{d}\omega &= \int_0^1 \cdots \int_0^1 \mathrm{d}\pi^1 \cdots \mathrm{d}\pi^{n-1}(0 - \lambda^n \circ \varphi^{-1}(\pi^1, \cdots, \pi^n = 0))(\text{只有}k = n\text{有贡献}) \\
&= \int_{\varphi(\partial M \cap U)} (-1)(\lambda^n \circ \varphi^{-1}) \mathrm{d}\pi^1 \cdots \mathrm{d}\pi^{n-1} \\
&= \int_{[\partial M \cap U, \Omega_\partial M]} (-1)\lambda^n(-1)^n \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{n-1} \\
&= \int_{[\partial M \cap U, \Omega_\partial M]} (-1)^{n-1}\lambda^n \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{n-1} \\
&= \int_{[\partial M \cap U, \Omega_\partial M]} \omega
\end{aligned}$$

□

12 曲线的微分几何

定义 12.1 (参数化曲线)

M 上的一条**参数化曲线** C 为一个光滑映射，

$$\gamma : I = (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$$

称 C 在 $p \in I$ 处**正则**，若 $\mathrm{rank}\gamma_{*,p} = 1$。
称 C 为**分段光滑参数化曲线**，若 γ 分段光滑。

注意到，C 在 p 处正则表明 γ 在 p 附近是浸入映射，由秩定理知局部 γ 为单浸入，且为嵌入，从而局部可将 γ 看成 $\gamma(p)$ 邻域的局部平凡化 $\varphi = \gamma^{-1}$。

但是 C 处处正则并不代表整体 γ 是单射。

构造 $\gamma^*TM = \{(t, X_{\gamma(t)}) \in I \times T_{\gamma(t)}M\}$，这是流形上的一个向量丛，且秩为 $\dim M$，其为 $\Gamma(I, \gamma^*TM)$ 中的一个元素。

定义 12.2

称 γ^*TM 为 TM 沿着 γ 的拉回，称 $\left(t, \gamma_{*,t}\left(\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_t\right)\right)$ 为 γ 的切向量场。

考虑 $M = \mathbb{R}^3$，取局部图册 $\left(U = \mathbb{R}^3, \varphi = \mathrm{id}, (x, y, z)^T\right)$

此时

$$\begin{aligned}\gamma : I &\to M \\ t &\mapsto \begin{pmatrix} x(t) = \pi^1 \circ \gamma(t) \\ y(t) = \pi^2 \circ \gamma(t) \\ z(t) = \pi^3 \circ \gamma(t) \end{pmatrix} = \gamma(t)\end{aligned}$$

定义 12.3 (Frenet 标架)

$$\begin{aligned} T \in \Gamma(I, \gamma^*TM), &\quad T(t) = \frac{\mathrm{d}\gamma(t)}{\mathrm{d}t} \Big/ \left|\frac{\mathrm{d}\gamma(t)}{\mathrm{d}t}\right| = \gamma_*(\frac{\partial}{\partial t}) \Big/ \left|\gamma_*(\frac{\partial}{\partial t})\right| \\ N \in \Gamma(I, \gamma^*TM), &\quad N = T'(t)/\left|T'(t)\right| \\ b \in \Gamma(I, \gamma^*TM), &\quad b = T \times N \end{aligned}$$

此处取度量为 $1 \cdot 1$(M 上的度量在 $\gamma(I)$ 上的限制)：

$$\left|X_{\gamma(t)}\right|^2 = g_{\mathbb{R}^3}(X_{\gamma(t)}, X_{\gamma(t)}), \forall X_{\gamma(t)} \in T_{\gamma(t)}M$$

事实：若 γ 正则，且 $|T'(t)| \neq 0$，$b \neq 0$，则 $\{T(t), N(t), b(t)\}$ 为 γ^*TM 的一个标架。

定理 12.1

Frenet 标架满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T, N, b) = (T, N, b) \cdot M$$

其中 M 具有形式

$$M(t) = \begin{pmatrix} 0 & -a(t) & 0 \\ a(t) & 0 & -b(t) \\ 0 & b(t) & 0 \end{pmatrix}$$

证明. 记 $e = (T, N, b)$ □

我们来看 Frenet 标架对参数 t 是否有依赖性，设 $\tilde{t}$ 为另一参数化，$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tilde{t}} > 0$

$$\begin{aligned} \tilde{T} &= \frac{\mathrm{d}\gamma(t(\tilde{t}))}{\mathrm{d}\tilde{t}} \Big/ \left|\frac{\mathrm{d}\gamma(t(\tilde{t}))}{\mathrm{d}\tilde{t}}\right| = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tilde{t}}\frac{\mathrm{d}\gamma(t))}{\mathrm{d}t} \Big/ \left|\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tilde{t}}\frac{\mathrm{d}\gamma(t))}{\mathrm{d}t}\right| = T \\ \tilde{N} &= \frac{\mathrm{d}\tilde{T}}{\mathrm{d}\tilde{t}} \Big/ \left|\frac{\mathrm{d}\tilde{T}}{\mathrm{d}\tilde{t}}\right| = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\tilde{t}} \Big/ \left|\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\tilde{t}}\right| = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tilde{t}}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} \Big/ \left|\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tilde{t}}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}\right| = N \end{aligned}$$

$\tilde{t}$ 自然不变。$\dfrac{\mathrm{d}\tilde{e}}{\mathrm{d}\tilde{t}} = \tilde{e}\tilde{M}$，$\dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = eM$，故 $\tilde{M} = \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tilde{t}}M$。
事实上

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{|\gamma \times \gamma''|}{|\gamma'|^2} \\ b(t) &= \frac{\mathrm{vol}(\gamma, \gamma', \gamma'')}{|\gamma' \times \gamma''|^2} |\gamma'| \end{aligned}$$

弧长参数 s 为满足 $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}$ 的下述方程的解：

$$\begin{aligned} &\left|\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}s}\right| = 1 \\ \Longleftrightarrow &\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\left|\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\right| = 1 \\ \Longleftrightarrow &\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \left|\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\right| \\ \Longleftrightarrow &s = \int^t |\gamma'(u)|\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

定义 12.4

曲线 C 的**曲率** $\kappa(s) = a(s)$，**挠率** $\tau(s) = b(s)$。

在弧长参数下，

$$\kappa(s) = \left|\frac{\mathrm{d}^2\gamma(s)}{\mathrm{d}s^2}\right| = |\ddot{\gamma}(s)|$$

$$\tau(s) = \frac{\mathrm{vol}(T, \dot{T}, \ddot{T})}{\left|\dot{T}\right|^2} = \frac{\mathrm{vol}(\gamma, \dot{\gamma}, \ddot{\gamma})}{|\dot{\gamma}|^2}$$

特别的，当 $\kappa(s) = 0$ 当且仅当 γ 为直线，$\tau(s) = 0$ 当且仅当 γ 为平面曲线，证明留作习题。

下面我们来看看微分几何在狭义相对论的体现。

之后补。

（2025.1.7补：还是不看了，过于大分）

13 $\mathbb{R}^3$ 中曲面的微分几何

定义 13.1 (曲面的参数化)

一个**参数化曲面**为一个光滑映射：

$$\Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \xrightarrow{F} M \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \circ i \circ F(u,v) \\ y \circ i \circ F(u,v) \\ z \circ i \circ F(u,v) \end{pmatrix}$$

简单起见，我们记 $r = i \circ F : \Omega \to \mathbb{R}^3$。

考虑参数化曲面$(\Omega \xrightarrow{r} F)$上的曲线

$$I \xrightarrow{\beta} \Omega \xrightarrow{r} M \subseteq \mathbb{R}^3$$
$$t \overset{\beta}{\mapsto} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \overset{r}{\mapsto} \begin{pmatrix} x \circ r(u,v) \\ y \circ r(u,v) \\ z \circ r(u,v) \end{pmatrix}$$

我们有：

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}(r\circ\beta)}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}(x\circ r)(u(t),v(t))}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\mathrm{d}(y\circ r)(u(t),v(t))}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\mathrm{d}(z\circ r)(u(t),v(t))}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial z} \\
&= \left(\frac{\partial(x\circ r)(u(t),v(t))}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial(x\circ r)(u(t),v(t))}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\partial}{\partial x} \\
&+ \left(\frac{\partial(y\circ r)(u(t),v(t))}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial(y\circ r)(u(t),v(t))}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\partial}{\partial y} \\
&+ \left(\frac{\partial(z\circ r)(u(t),v(t))}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial(z\circ r)(u(t),v(t))}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\partial}{\partial z} \\
&= \left(\frac{\partial(x\circ r)(u(t),v(t))}{\partial u}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial(y\circ r)(u(t),v(t))}{\partial u}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial(z\circ r)(u(t),v(t))}{\partial u}\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} \\
&+ \left(\frac{\partial(x\circ r)(u(t),v(t))}{\partial v}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial(y\circ r)(u(t),v(t))}{\partial v}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial(z\circ r)(u(t),v(t))}{\partial v}\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} \\
(T\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3) &= \frac{\partial r(u(t),v(t))}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial r(u(t),v(t))}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} \\
&:= r_u\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + r_v\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_pM &= \left\{ \left.\frac{\mathrm{d}(\text{过 } p \text{ 的道路})}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \right\} \subseteq T_p\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3 \\
(\text{取特殊的道路 } \beta\text{，通过 } \gamma\circ\beta) &= \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\left\{ r_u|_p, r_v|_p \right\}
\end{aligned}$$

其中

$$r_u = r_*\frac{\partial}{\partial u}, r_v = r_*\frac{\partial}{\partial v}, r : \Omega \to M \subseteq \mathbb{R}^3$$

M 上的度量

$$g_{\mathbb{R}^3} = \mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x + \mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}y + \mathrm{d}z \otimes \mathrm{d}z$$
$$g_{\mathbb{R}^3}|_M : \Gamma(M, TM) \times \Gamma(M, TM) \to A^0(M)$$
$$g_{\mathbb{R}^3}|_{p\in M}(X_p, Y_p) = g_{\mathbb{R}^3}(X_p, Y_p)$$

取 T_pM 的基 r_u, r_v，则 $g(r_u, r_u) = \langle r_u, r_u \rangle, g(r_v, r_v) = \langle r_v, r_v \rangle, g(r_u, r_v) = \langle r_u, r_v \rangle$

定义 13.2 (第 I 基本型)

定义参数化曲面 $r : \Omega \to M \subseteq \mathbb{R}^3$ 的第 I 基本型为 $I = g_{\mathbb{R}^3}|_M$ 在 TM 的基 r_u, r_v 和局部坐标系 u, v 下(此时 $r : \Omega \to M$ 为局部平凡化映射的逆)

$$\begin{aligned} I &= \langle r_u, r_u \rangle \mathrm{d}u \otimes \mathrm{d}u + \langle r_u, r_u \rangle \mathrm{d}u \otimes \mathrm{d}u + \langle r_u, r_v \rangle \mathrm{d}u \otimes \mathrm{d}v + \langle r_v, r_u \rangle \mathrm{d}v \otimes \mathrm{d}u + \langle r_v, r_v \rangle \mathrm{d}v \otimes \mathrm{d}v \\ &:= \langle r_u \mathrm{d}u + r_v \mathrm{d}v, r_u \mathrm{d}u + r_v \mathrm{d}v \rangle_{\mathbb{R}^3} = \langle \mathrm{d}r, \mathrm{d}r \rangle_{\mathbb{R}^3} \end{aligned}$$

命题 13.1

I 不依赖于 Ω 坐标的选取，即在 Ω 的新坐标 $(\tilde{u}, \tilde{v}) = \phi(u, v)$，其中 ϕ 是 $\Omega \to \Omega$ 的微分同胚，那么

$$I = \sum_{k,l} \langle r_{u^k}, r_{u^l} \rangle \mathrm{d}u^k \otimes \mathrm{d}u^l = \phi^* \left(\sum_{k,l} \langle r_{\tilde{u}^k}, r_{\tilde{u}^l} \rangle \mathrm{d}\tilde{u}^k \otimes \mathrm{d}\tilde{u}^l \right)$$

证明. $r, \mathrm{d}r$ 不依赖于 Ω 上坐标的选取，故 $I = r^* g_M$ 不依赖于坐标的选取。 □

r 局部浸入，我们有 r_u, r_v 局部线性无关，故

$$N(u, v) = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|} \in \Gamma(\Omega, r^* T\mathbb{R}^3)$$

定义 13.3 (第 II 基本型)

参数化曲面 $r : \Omega \to M \subseteq \mathbb{R}^3$ 的第 II 基本型为 $II = -\langle \mathrm{d}r, \mathrm{d}N \rangle_{\mathbb{R}^3}$

考虑线性映射

$$\begin{aligned} b : \Gamma(\Omega, r^* TM) &\to \Gamma(\Omega, r^* TM) \\ r_u &\mapsto -N_u \\ r_v &\mapsto -N_v \end{aligned}$$

从而 $\mathrm{II} = -\langle \mathrm{d}r, \mathrm{d}N \rangle_{\mathbb{R}^3} = \langle \mathrm{d}r, b(\mathrm{d}r) \rangle_{\mathbb{R}^3}$，其中

$$b(\mathrm{d}r) = b(\sum_{k=1}^{2} r_{u^k} \mathrm{d}u^k) = \sum_{k=1}^{2} b(r_{u^k}) \mathrm{d}u^k = -\sum_{k=1}^{2} N_{u^k} \mathrm{d}u^k = -\mathrm{d}N$$

有时也称 b 为第 II 基本型。

命题 13.2

线性映射 b 为自伴随映射，即在 $\langle bx, y \rangle = \langle x, b^* y \rangle$ 中有 $b^* = b$

证明. 取 $\Gamma(\Omega, r^*TM)$ 的基 $r_{u^k}, k=1,2$

$$LHS = -\langle N_{u^k}, r_{u^l}\rangle = \langle N, r_{u^l u^k}\rangle = \langle N, r_{u^k u^l}\rangle = RHS$$

□

定义双线性型

$$\begin{aligned} B : \Gamma(\Omega, r^*TM) \otimes \Gamma(\Omega, r^*TM) &\to \mathbb{R} \\ (X,Y) &\mapsto B(X,Y) = \langle X, bY\rangle \end{aligned}$$

则 b 自伴随 $\Longleftrightarrow$ B 对称。

定理 13.1

考虑

$$\kappa_1(p) = \max_{\substack{X_p\in TM|_p \\ |X_p|=1}} B(X_p, X_p), \kappa_2(p) = \min_{\substack{X_p\in TM|_p \\ |X_p|=1}} B(X_p, X_p)$$

称 κ_1, κ_2 为 M 在 p 处的主曲率，对应取到极值的向量 X_p 称为主方向。则

- 最大、最小值可以被取到。
- κ_1, κ_2 为映射 b 的特征值，此时对应的主方向即为所对的特征向量。
- $\kappa_1 \neq \kappa_2$ 时主方向正交。

证明. $B = U^T \mathrm{diag}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\} U$，其中 U 为正交阵，$\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$，做坐标变换可不妨 $B(x,x) = \sum \lambda_i x_i^2$，从而结论显然。 □

定义 13.4

考虑 $\Omega \xrightarrow{r} M \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{R}^3$ 以及 $b : \Gamma(\Omega, r^*TM) \to \Gamma(\Omega, r^*TM)$。
定义 p 处的 **Gauss 曲率** 为 $\kappa = \det b = \kappa_1\kappa_2$，**平均曲率**为 $H = \mathrm{Tr} b = \kappa_1 + \kappa_2$。

命题 13.3

令 $b_{kl} = B(r_k, r_l) = \langle r_k, b(r_l)\rangle = \langle r_{kl}, N\rangle$，$g_{kl} = \langle r_k, r_l\rangle$，则

$$\kappa = \frac{\det(b_{kl})}{\det(g_{kl})}, H = \sum g^{kl} b_{kl}$$

下面我们讲介绍**高斯绝妙定理(Gauss's theorem egregium)**。
对 Gauss 曲面方程 $\Omega \xrightarrow{r} M \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{R}^3$，考虑正交投影，

$$\begin{aligned} r_{jk} &= r_i \Gamma^i_{jk} + \langle r_{jk}, N\rangle N \qquad r_k = \frac{\partial r}{\partial u_k}, r_{kl} = \frac{\partial^2 r}{\partial u^k \partial u^l} \\ &= r_i \Gamma^i_{jk} + B_{jk} N \end{aligned}$$

这给出了 Γ^i_{jk} 的定义。

命题 13.4

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{il} (\frac{\partial g_{lk}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^l})$$

其中 $g_M = \mathrm{d}s^2 = \sum g_{jk} \mathrm{d}u^j \otimes \mathrm{d}u^k$

证明. 注意到 r_{jk} 关于 j,k 对称，故 $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$

考虑

$$\langle r_{jk}, r_l \rangle = \langle r_i \Gamma^i_{jk} + B_{jk} N, r_l \rangle = g_{il} \Gamma^i_{jk}$$

$$\begin{aligned} \partial_i g_{jk} = \partial_i \langle r_j, r_k \rangle =& \langle \partial_i r_j, r_k \rangle + \langle r_j, \partial_i r_k \rangle \\ =& \langle r_{ij}, r_k \rangle + \langle r_{ik}, r_j \rangle \\ =& g_{ak} \Gamma^a_{ij} + g_{bj} \Gamma^b_{ki} \end{aligned}$$

注意到 $\partial_i g_{jk}$ 关于 j,k 对称。对上式中的 i,j,k 做轮换，有

$$\begin{aligned} & \partial_j g_{ki} + \partial_k g_{ij} - \partial_i g_{jk} \\ =& (g_{ai} \Gamma^a_{jk} + g_{bk} \Gamma^b_{ij}) + (g_{aj} \Gamma^a_{ki} + g_{bi} \Gamma^b_{jk}) - (g_{ak} \Gamma^a_{ij} + g_{bj} \Gamma^b_{ik}) \\ =& 2 g_{ai} \Gamma^a_{jk} \end{aligned}$$

$$\implies \frac{1}{2} g^{ai} (\partial_j g_{ki} + \partial_k g_{ij} + \partial_i g_{jk}) = \Gamma^a_{jk}$$

□

可积性条件指的是 r_{ijk} 与 i,j,k 顺序无关。

命题 13.5

$$0 = r_{ijk} - r_{ikj} \overset{\text{Gauss 方程}}{=} r_a (R^a_{ijk} - U^a_{ijk}) + V_{ijk} N$$

其中

$$\begin{aligned} R^a_{ikj} &= (\partial_k \Gamma^a_{ij} - \partial_j \Gamma^a_{ik}) + (\Gamma^a_{kb} \Gamma^b_{ij} - \Gamma^a_{jb} \Gamma^b_{ki}) \text{称为 } \textbf{Riemann 曲率张量} \\ U^a_{ijk} &= B^a_k B_{ij} - B^a_j B_{ik}, B^i_j = g^{ik} B_{kj} \\ V_{ijk} &= \Gamma^a_{ij} B_{ak} + \partial_k B_{ij} - \Gamma^a_{ik} B_{aj} - \partial_j B_{ik} \end{aligned}$$

特别的，称 $R^a_{ikj} = U^a_{ijk}$ 为 **Gauss 方程**，$V_{ijk} = 0$ 为 **Codazzi-Peterson 方程**

推论 13.1

Γ^i_{jk} 不是张量，R^a_{bkl} 是张量，且关于 k,l 反对称。

证明. 为方便记录，在下文中我们约定涉及旧坐标系 $\{x^i\}$ 的指标均以拉丁字母表示，涉及新坐标系 $\{y^\alpha\}$ 的指标均以希腊字母表示，采取 Einstein 求和约定,并适当省略计算过程。简记

$\partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i}, \partial_\alpha := \frac{\partial}{\partial y^\alpha}$,其可由 $\partial_\alpha = \partial_\alpha x^j \partial_j$ 联系. 记 g, Γ, R 在新坐标系中的对应分量为

$$\widetilde{g}_{\alpha\beta} := g\left(\partial_\alpha, \partial_\beta\right), \widetilde{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta} := \frac{1}{2}\widetilde{g}^{\gamma\delta}\left(\partial_\alpha \widetilde{g}_{\delta\beta} + \partial_\beta \widetilde{g}_{\delta\alpha} - \partial_\delta \widetilde{g}_{\alpha\beta}\right), \widetilde{R}^\alpha_{\beta\gamma\delta} := \partial_\gamma \widetilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\delta} - \partial_\delta \widetilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} + \widetilde{\Gamma}^\alpha_{\gamma\varepsilon}\widetilde{\Gamma}^\varepsilon_{\beta\delta} - \widetilde{\Gamma}^\alpha_{\delta\varepsilon}\widetilde{\Gamma}^\varepsilon_{\beta\gamma}$$

由 g 是一个(2,0)-型张量可知 $\widetilde{g}_{\alpha\beta} = \partial_\alpha x^i \partial_\beta x^j g_{ij}$,左右以 $\partial_\delta = \partial_\delta x^k \partial_k$ 求导可得

$$\partial_\delta \widetilde{g}_{\alpha\beta} = \partial_\delta \partial_\alpha x^i \partial_\beta x^j g_{ij} + \partial_\alpha x^i \partial_\delta \partial_\beta x^j g_{ij} + \partial_\delta x^k \partial_\alpha x^i \partial_\beta x^j \partial_k g_{ij}.$$

注意指标轮换, 计算可得

$$\partial_\alpha \widetilde{g}_{\beta\delta} + \partial_\beta \widetilde{g}_{\delta\alpha} - \partial_\delta \widetilde{g}_{\alpha\beta} = 2\partial_\alpha \partial_\beta x^i \partial_\delta x^j g_{ij} + \partial_\alpha x^k \partial_\beta x^i \partial_\delta x^j \left(\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{jk} - \partial_j g_{ki}\right).$$

最后两边同乘 $\frac{1}{2}\widetilde{g}^{\gamma\delta} = \frac{1}{2}\partial_l y^\gamma \partial_j y^\delta g^{lj}$,由 $\widetilde{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\widetilde{g}^{\gamma\delta}\left(\partial_\alpha \widetilde{g}_{\beta\delta} + \partial_\beta \widetilde{g}_{\delta\alpha} - \partial_\delta \widetilde{g}_{\alpha\beta}\right)$ 得

$$\widetilde{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta} = \partial_l y^\gamma \partial_\alpha \partial_\beta x^l + \partial_l y^\gamma \partial_\alpha x^k \partial_\beta x^i \Gamma^l_{ki} = \frac{\partial y^\gamma}{\partial x^i}\frac{\partial^2 x^i}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} + \frac{\partial y^\gamma}{\partial x^k}\frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha}\frac{\partial x^j}{\partial y^\beta}\Gamma^k_{ij}.$$

如果 Γ^k_{ij} 为张量分量，则其应只有后一项,易见多出来的一项与 Jacobi 矩阵和 Hesse 矩阵均有关，一般情况下其并不平凡，故 Γ^k_{ij} 不为某张量的分量。

对于 R，由上得到

$$\begin{aligned}\partial_\gamma \widetilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\delta} = &\partial_\gamma x^a \partial_p \left(\partial_a y^\alpha\right) \partial_\beta \partial_\delta x^p + \partial_a y^\alpha \partial_\beta \partial_\gamma \partial_\delta x^a \\ &+ \partial_\gamma \left(\partial_a y^\alpha \partial_\beta x^b \partial_\delta x^t\right)\Gamma^a_{bt} + \partial_a y^\alpha \partial_\beta x^b \partial_\gamma x^k \partial_\delta x^l \partial_k \Gamma^a_{bl},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\Gamma}^\alpha_{\gamma\varepsilon}\widetilde{\Gamma}^\varepsilon_{\beta\delta} = &\partial_a y^\alpha \partial_p \left(\partial_\gamma x^a\right) \partial_\beta \partial_\delta x^p + \partial_p y^\alpha \partial_a \left(\partial_\gamma x^p\right) \partial_\beta x^b \partial_\delta x^t \Gamma^a_{bt} \\ &+ \partial_\delta \left(\partial_\beta x^b\right) \partial_a y^\alpha \partial_\gamma x^t \Gamma^a_{tb} + \partial_a y^\alpha \partial_\beta x^b \partial_\gamma x^k \partial_\delta x^l \Gamma^a_{kp}\Gamma^p_{bl}.\end{aligned}$$

注意指标置换,将上两式代入 $\widetilde{R}^\alpha_{\beta\gamma\delta} = \partial_\gamma \widetilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\delta} - \partial_\delta \widetilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} + \widetilde{\Gamma}^\alpha_{\gamma\varepsilon}\widetilde{\Gamma}^\varepsilon_{\beta\delta} - \widetilde{\Gamma}^\alpha_{\delta\varepsilon}\widetilde{\Gamma}^\varepsilon_{\beta\gamma}$,由一系列计算可得

$$\widetilde{R}^\alpha_{\beta\gamma\delta} = \partial_a y^\alpha \partial_\beta x^b \partial_\gamma x^k \partial_\delta x^l R^a_{bkl} = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^a}\frac{\partial x^b}{\partial y^\beta}\frac{\partial x^k}{\partial y^\gamma}\frac{\partial x^l}{\partial y^\delta}R^a_{bkl}.$$

故由上式形式知 R^a_{bkl} 是某张量的分量。 □

考虑 $M \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{R}^3$，则 $R^a_{bkl} \overset{\text{Gauss 方程}}{=} B^a_k B_{bl} - B^a_l B_{bk}$ 由 $\partial\Gamma - \partial\Gamma + \Gamma\Gamma - \Gamma\Gamma$ 给出。
$\dim M = n = 2$ 时，R^a_{bkl} 中独立的分量之集 $R^a_{b12}(R^a_{b11} = R^a_{b22} = 0, R^a_{b21} = -R^a_{b12})$
考虑 $g^{cb}R^a_{bkl}$ 中独立的分量

$$\begin{aligned}g^{2b}R^1_{b12} &\overset{\text{Gauss 方程}}{=} g^{2b}(B^1_1 B_{b2} - B^1_2 B_{b1}) \\ &= B^1_1 B^2_2 - B^1_2 B^2_1 = K\end{aligned}$$

定理 13.2 (高斯绝妙定理)

K 仅与 g_M 有关，与 $M \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{R}^3, r : \Omega \to M$ 无关。

证明. $K = g^{2b}R^1_{b12}$，$R = \partial\Gamma - \partial\Gamma + \Gamma\Gamma - \Gamma\Gamma$ 仅与 Γ 有关，$\Gamma = \frac{1}{2}g(\partial g + \partial g - \partial g)$ 仅与 g 有关，故 K 仅与 g 有关。 □

定义 13.5 (等距映射)

设 $(M, g_M), (N, g_N)$ 为赋予了度量的微分流形，称 $\phi : M \to N$ 为**等距同构**，若

- ϕ 为微分同胚。
- $\phi^* g_N = g_M (\forall X, Y \in \Gamma(M, TM), g_M(X, Y) = g_N(\phi^* X, \phi^* Y))$

注：等距映射保持**切向量场之间的内积**，而不是**两点的距离**。

于是我们可以如下陈述高斯绝妙定理：K 在等距同构意义下不变。

定理 13.3 (Bonnet)

若满足 Gauss,Codazzi-Peterson 方程，则局部存在流形 M 以及度量 g_M 使得由 g_M 定义的 R 满足 Gauss-Codazzi-Peterson 的 R。

定理 13.4 (Frenet)

给定 $\kappa(s), \tau(s)$，存在空间曲线 γ 使得其曲率，挠率分别为 $\kappa(s), \tau(s)$。

14 高维切向量场的导数

下面我们考虑如何对 M 上切向量场 V 求导。

在参数化曲面上，按前文所述，如果要给出 $r : \Omega \to M$ 在 u_i 上的导数，我们需要取出正交投影，而这要求其上有度量结构。我们希望，通过某种方式定义导数而不依赖度量。

定义 14.1

$$\begin{aligned}\mathrm{d} : \Gamma(M, TM) \otimes C^\infty(M, \mathbb{R}) &\to C^\infty(M, \mathbb{R}) \\ (X, f) &\mapsto X(f) = \mathrm{d}f(x) := \mathrm{d}_X f\end{aligned}$$

满足：

- $\mathrm{d}_X f$ 关于 X 线性，满足 $\mathrm{d}_{gX} f = g\mathrm{d}_X f$。
- $\mathrm{d}_X f$ 关于 f 线性。
- $\mathrm{d}_X f$ 关于 f 满足 Leibnitz 法则。

则 d 可视为 $C^\infty(M, \mathrm{R}) \to \Gamma(M, TM)^* \otimes C^\infty(M, \mathbb{R}) \cong \Gamma(M, T^*M) \otimes C^\infty(M, \mathbb{R})$ 或等价地视为

$$d \in \Gamma(M, T^*M) \otimes \left\{ Map(C^\infty(M, \mathbb{R}), C^\infty(M, \mathbb{R})) \middle| \text{线性、满足 Leibnitz 法则} \right\}$$

在局部坐标图 (U, φ, x) 取局部 $\Gamma(M, TM)$ 的基 $e_k = \frac{\partial}{\partial x^k}$ 与 $\Gamma(M, TM)^* = \Gamma(M, T^*M)$ 的对偶

基 $\omega^k = \mathrm{d}x^k$，则

$$\mathrm{d} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{d}x^k \otimes \frac{\partial}{\partial x^k}(-) \qquad \mathrm{d}_X f = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{d}x^k(X)\frac{\partial}{\partial x^k} f$$

按定义 d 不依赖 $\{e_k\}$ 及对偶基 $\{\omega^k\}$ 的选取。

定义 14.2 (协变导数)

$$\begin{aligned}\nabla : \Gamma(M, TM) \otimes \Gamma(M, TM) &\to \Gamma(M, TM)\\ (X, V) &\mapsto \nabla_X V\end{aligned}$$

称为切向量场 V 沿 X 的**协变导数**，若 ∇ 满足：

- $\nabla_X V$ 关于 X 线性，满足 $\nabla_{gX} V = g\nabla_X V$。
- $\nabla_X V$ 关于 V 线性。
- $\nabla_X V$ 关于 V 满足 Leibnitz：$\nabla_X(fV) = (\nabla_X f)V + f\nabla_X V = (\mathrm{d}_X f)V f\nabla_X V$