

实分析笔记

zdd

2025 年 4 月 23 日



目录

1 前言	1
1.1 简单测度	1
1.2 Jordan 测度	2
2 Lebesgue 测度	4
2.1 Lebesgue 外测度的性质	4
2.2 Lebesgue 可测性	5
2.3 Lebesgue 不可测集	9
3 Lebesgue 积分	10
3.1 简单函数的积分	10
3.2 可测函数	12
3.3 无符号 Lebesgue 积分	14
3.4 绝对可积性	17
3.5 小木头三主角	18
4 抽象测度空间	20
4.1 Boolean 代数	20
4.2 σ -代数和可测空间	20
4.3 可数可加测度和测度空间	21
4.4 测度空间上的可测函数与积分	22
4.5 收敛定理	26
5 收敛模式	28
5.1 唯一性	29
5.2 阶梯函数的情形	30
5.3 有限测度空间	30
5.4 快速收敛	30
5.5 一致可积	31
6 外测度、预测度和积测度	32
6.1 外测度与 Caratheodory 扩张定理	32
6.2 预测度	32
6.3 积测度	33

1 前言

1.1 简单测度

在 Jordan 测度前, 我们先考虑更简单的情形, 即简单集合。

定义 1.1

一个区间(interval)为 $\mathbb{R}$ 的子集, 形如 $[a, b], [a, b), (a, b], (a, b)$, 定义区间 I 的长度 $|I| := b - a$ 。 $\mathbb{R}^d$ 上的长方体(box)为 $B := I_1 \times \cdots \times I_d$, 其中 I_i 均为区间, 定义长方体 B 的体积 $|B| := |I_1| \times \cdots \times |I_d|$ 。一个简单集合(elementary set)为 $\mathbb{R}^d$ 中有限长方体的并。

命题 1.1 (Boolean closure)

简单集合的并、交、差、对称差、平移均为简单集合。

引理 1.1

设 $E \subset \mathbb{R}^d$ 是简单集合。

- E 可以写成有限个不交的长方体的并。
- 设 $E = B_1 \cup \cdots \cup B_k$ 为不交并, 定义 $m(E) := |B_1| + \cdots + |B_k|$ 与 B_i 的选取无关。

命题 1.2

对简单集合 $E \subset \mathbb{R}^d$, 有

$$m(E) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^d} \# \left\{ E \cap \frac{1}{N} \mathbb{Z}^d \right\}$$

命题 1.3

- (非负性)

$$m(E) \geq 0$$

- (有限可加性)对不交的简单集合 $E_1, \cdots, E_k$,

$$m(E_1 \cup \cdots \cup E_k) = m(E_1) + \cdots + m(E_k)$$

- (单调性) $E \subset F$, 则

$$m(E) \leq m(F)$$

- (有限次可加性)对任意简单集合 $E_1, \cdots, E_k$,

$$m(E_1 \cup \cdots \cup E_k) \leq m(E_1) + \cdots + m(E_k)$$

- (平移不变性)

$$m(E + x) = m(E)$$

Problem 1.1 (简单测度的唯一性)

设 $d \geq 1$ 。令 $m' : \mathcal{E}(\mathbf{R}^d) \rightarrow \mathbf{R}^+$ 为一个从 $\mathbf{R}^d$ 的简单集合族 $\mathcal{E}(\mathbf{R}^d)$ 到非负实数的映射，且满足非负性、有限可加性及平移不变性。证明存在常数 $c \in \mathbf{R}^+$ 使得对所有简单集合 E ，有 $m'(E) = c \cdot m(E)$ 。特别地，若附加归一化条件 $m'([0, 1)^d) = 1$ ，则 $m' \equiv m$ 。

提示：设 $c := m'([0, 1)^d)$ ，并对任意正整数 n 计算 $m'([0, \frac{1}{n})^d)$ 。

1.2 Jordan 测度**定义 1.2 (Jordan 测度)**

设 $E \subset \mathbf{R}^d$ 为有界集。

- E 的 **Jordan 内测度** $m_{*,(J)}(E)$ 定义为

$$m_{*,(J)}(E) := \sup_{\substack{A \subset E \\ A \text{ 为简单集}}} m(A).$$

- E 的 **Jordan 外测度** $m^{*,(J)}(E)$ 定义为

$$m^{*,(J)}(E) := \inf_{\substack{B \supset E \\ B \text{ 为简单集}}} m(B).$$

- 若 $m_{*,(J)}(E) = m^{*,(J)}(E)$ ，则称 E 是 **Jordan 可测的**，并称 $m(E) := m_{*,(J)}(E) = m^{*,(J)}(E)$ 为 E 的 **Jordan 测度**。类似地，当需强调维数 d 时，记 $m(E)$ 为 $m^d(E)$ 。

命题 1.4 (Jordan 可测性的等价刻画)

设 $E \subset \mathbf{R}^d$ 为有界集。证明以下命题等价：

- E 是 Jordan 可测的。
- 对任意 $\varepsilon > 0$ ，存在简单集合 $A \subset E \subset B$ 使得

$$m(B \setminus A) \leq \varepsilon.$$

- 对任意 $\varepsilon > 0$ ，存在简单集合 A 使得

$$m^{*,(J)}(A \Delta E) \leq \varepsilon,$$

命题 1.5

设 $E, F \subset \mathbf{R}^d$ 为 Jordan 可测集。

- 两者的并、交、差、对称差均 Jordan 可测。
- Jordan 测度 m 满足非负性、有限可加性、单调性、有限次可加性、平移不变性。

Problem 1.2

- $\mathbb{R}$ 上的三角形是 Jordan 可测的。
- $\mathbb{R}^d$ 上的紧凸多面体是 Jordan 可测的。
- $\mathbb{R}^d$ 上的开球和闭球都是 Jordan 可测的。

命题 1.6

对线性变换 $L: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$,

$$m(L(E)) = |\det L| m(E)$$

定义 1.3

Jordan 测度为零的集合称为 **Jordan 零测集**。

命题 1.7

Jordan 零测集的子集也是 Jordan 零测集。

Problem 1.3

定义二分立方体为如下形式的半开长方体:

$$\left[\frac{i_1}{2^n}, \frac{i_1+1}{2^n} \right) \times \cdots \times \left[\frac{i_d}{2^n}, \frac{i_d+1}{2^n} \right)$$

其中 $n, i_1, \dots, i_d$ 为整数。设 $E \subset \mathbb{R}^d$ 为有界集。对每个整数 n , 令 $\mathcal{E}_*(E, 2^{-n})$ 表示包含于 E 内且边长为 2^{-n} 的二分立方体的个数, 并令 $\mathcal{E}^*(E, 2^{-n})$ 表示与 E 相交且边长为 2^{-n} 的二分立方体的个数。证明 E 是 Jordan 可测的当且仅当

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-dn} (\mathcal{E}^*(E, 2^{-n}) - \mathcal{E}_*(E, 2^{-n})) = 0,$$

此时成立

$$m(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-dn} \mathcal{E}_*(E, 2^{-n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-dn} \mathcal{E}^*(E, 2^{-n}).$$

Problem 1.4 (Jordan测度的唯一性)

设 $d \geq 1$ 。令 $m': \mathcal{J}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}^+$ 为一个从 $\mathbb{R}^d$ 的 Jordan 可测子集族 $\mathcal{J}(\mathbb{R}^d)$ 到非负实数的映射, 且满足非负性、有限可加性及平移不变性。证明存在常数 $c \in \mathbb{R}^+$ 使得对所有 Jordan 可测集 E , 有 $m'(E) = c \cdot m(E)$ 。特别地, 若附加归一化条件 $m'([0, 1]^d) = 1$, 则 $m' \equiv m$ 。

命题 1.8

设 $E \subset \mathbb{R}^d$ 为有界集。

- E 的闭包 $\bar{E}$ 与 E Jordan 外测度相同。
- E 的内部 E° 与 E Jordan 内测度相同。
- E 是 Jordan 可测的当且仅当边界 ∂E 的 Jordan 外测度为 0。

2 Lebesgue 测度

Jordan 测度的问题在于，当一个集合内部的空隙太多时，如 $[0, 1]^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ ，内测度与外测度就不相等，这是我们希望改进的。同时无限交和无限并不能保持 Jordan 可测性。我们通过 Jordan 外测度的定义来引出 Lebesgue 外测度的定义：

定义 2.1

定义 Lebesgue 外测度

$$m^*(E) := \inf_{\substack{\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \supset E \\ B_1, B_2, \dots \text{ 为长方体}}} \sum_{n=1}^{\infty} |B_n|.$$

定义 2.2

集合 $E \subset \mathbb{R}^d$ 称为 **Lebesgue 可测的**，若对任意 $\varepsilon > 0$ 存在开集 $U \subset \mathbb{R}^d$ 且 $E \subset U$ ，满足 $m^*(U \setminus E) < \varepsilon$ 。此时记 $m(E) := m^*(E)$ 作为 E 的 Lebesgue 测度。类似地，当需强调维数 d 时，记 $m(E)$ 为 $m^d(E)$ 。

2.1 Lebesgue 外测度的性质

命题 2.1

•

$$m^*(\emptyset) = 0$$

• (单调性) 若 $E \subset F$ ，有

$$m^*(E) \leq m^*(F)$$

• (可数次可加性) 设 $E_1, E_2, \dots \subset \mathbb{R}^d$ 是可数个集合，则

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n)$$

引理 2.1

设 $E, F \subset \mathbb{R}^d$ 满足 $\text{dist}(E, F) := \inf \{|x - y| \mid x \in E, y \in F\} > 0$ ，则

$$m^*(E \cup F) = m^*(E) + m^*(F)$$

命题 2.2

令 $E, F \subset \mathbb{R}^d$ 为不交的闭集，且有一者是紧的。则 $\text{dist}(E, F) > 0$ 。

引理 2.2

令 E 是简单集合，则 $m^*(E) = m(E)$ 。

定义 2.3

称两个长方体是几乎不交的(almost disjoint), 若其内部不交。

容易看到 $m(B_1 \cup \cdots \cup B_k) = |B_1| + \cdots + |B_k|$ 不仅对不交的 B_i 成立, 对几乎不交也成立。

引理 2.3

令 $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ 为可数个几乎不交的长方体 $B_1, B_2, \dots$ 的并, 则

$$m^*(E) = \sum_{n=1}^{\infty} |B_n|$$

命题 2.3

若 $E \subset \mathbb{R}^d$ 可以写成可数个几乎不交的长方体的并, 则

$$m^*(E) = m_{*,(J)}(E)$$

引理 2.4

设 $E \subset \mathbb{R}^d$ 为开集, 则 E 可以写成可数个几乎不交的长方体的并。

至此, 我们对所有开集都给出了 Lebesgue 外测度公式, 更进一步地, 我们终于能给出任意集合的 Lebesgue 外测度公式:

引理 2.5 (外部正则)

令 $E \subset \mathbb{R}^d$ 为任意集合, 则

$$m^*(E) = \inf_{\substack{E \subset U \\ U \text{ 开集}}} m^*(U)$$

2.2 Lebesgue 可测性**引理 2.6**

- 任意开集是 Lebesgue 可测的。
- 任意闭集是 Lebesgue 可测的。
- 任意 Lebesgue 外测度为 0 的集合是 Lebesgue 可测的, 称为**零测集(null sets)**。
- 空集 $\emptyset$ 是 Lebesgue 可测的。
- 若 E 是 Lebesgue 可测的, 则 $\mathbb{R}^d \setminus E$ 是 Lebesgue 可测的。
- 若 $E_1, E_2, \dots \subset \mathbb{R}^d$ 是 Lebesgue 可测的, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ 是 Lebesgue 可测的。
- 若 $E_1, E_2, \dots \subset \mathbb{R}^d$ 是 Lebesgue 可测的, 则 $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ 是 Lebesgue 可测的。

命题 2.4

设 $E \subset \mathbb{E}^d$, 则如下命题等价:

- E Lebesgue 可测。
- 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在开集 $U \supset E$ 满足 $m^*(U \setminus E) \leq \varepsilon$ 。
- 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在开集 U 满足 $m^*(U \triangle E) \leq \varepsilon$ 。
- 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在闭集 $F \subset E$ 满足 $m^*(E \setminus F) \leq \varepsilon$ 。
- 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在闭集 F 满足 $m^*(F \triangle E) \leq \varepsilon$ 。
- 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 Lebesgue 可测集 E_ε 满足 $m^*(E_\varepsilon \triangle E) \leq \varepsilon$ 。

命题 2.5

任意 Jordan 可测集都是 Lebesgue 可测的。

命题 2.6 (Cantor set)

令 $I_0 := [0, 1]$ 为单位区间, $I_1 := [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$ 为从 I_0 中移除中间三分之一开区间后的集合, $I_2 := [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$ 为从 I_1 的每个区间中再移除中间三分之一开区间后的集合, 依此类推。更形式化地, 定义

$$I_n := \bigcup_{a_1, \dots, a_n \in \{0, 2\}} \left[\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{3^i}, \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{3^i} + \frac{1}{3^n} \right].$$

令 $C := \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ 为所有初等集 I_n 的交集。证明 C 是紧的、不可数的且为零测集。

Problem 2.1

证明 $[0, 1)$ 不能写成可数个不交闭区间的并。更强地, 不能写成闭集的并。

引理 2.7

•

$$m(\emptyset) = 0$$

- (可数可加性) 若 $E_1, E_2, \dots \subset \mathbb{R}^d$ 为可数个不交 Lebesgue 可测集, 则

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$$

定理 2.1 (单调收敛定理)

- 令 $E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset \mathbb{R}^d$ 为可数 Lebesgue 可测集, 则

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(E_n)$$

- 令 $\mathbb{R}^d \supset E_1 \supset E_2 \supset \cdots$ 为可数 Lebesgue 可测集, 且至少一个 $m(E_n)$ 是有限的, 则

$$m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(E_n)$$

命题 2.7 (内部正则)

令 $E \subset \mathbb{R}^d$ 是 Lebesgue 可测集, 则

$$m(E) = \sup_{\substack{K \subset E \\ K \text{ 紧}}} m(K)$$

命题 2.8 (有限测度的性质)

令 $E \subset \mathbb{R}^d$, 则如下命题等价:

- E 是 Lebesgue 可测集且测度有限。
- 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在有限测度的开集 $U \supset E$ 满足 $m^*(U \setminus E) \leq \varepsilon$ 。
- 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在有界开集 U 满足 $m^*(U \triangle E) \leq \varepsilon$ 。
- 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在有限测度的紧集 $F \subset E$ 满足 $m^*(E \setminus F) \leq \varepsilon$ 。
- 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在紧集 F 满足 $m^*(F \triangle E) \leq \varepsilon$ 。
- 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在有界 Lebesgue 可测集 E_ε 满足 $m^*(E_\varepsilon \triangle E) \leq \varepsilon$ 。
- 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在有限测度的 Lebesgue 可测集 E_ε 满足 $m^*(E_\varepsilon \triangle E) \leq \varepsilon$ 。
- 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在简单集合 E' 满足 $m^*(E' \triangle E) \leq \varepsilon$ 。
- 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 n 与有限个边长为 2^{-n} 的闭长方体的并 F 满足 $m^*(E \triangle F) \leq \varepsilon$ 。

命题 2.9

令 $E \subset \mathbb{R}^d$, 则如下命题等价:

- E Lebesgue 可测。
- 对任意简单集合 A , 有

$$m(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E)$$

- 对任意长方体 B , 有

$$m(B) = m^*(B \cap E) + m^*(B \setminus E)$$

定理 2.2

对有界集 $E \subset \mathbb{R}^d$, 对任意简单集合 $A \supset E$, 定义 **Lebesgue 内测度**

$$m_*(E) := m(A) - m^*(A \setminus E)$$

命题 2.10

- $m_*(E)$ 与 A 的选取无关。
- $m_*(E) \leq m^*(E)$, 取等当且仅当 E Lebesgue 可测。

定义 2.4

记 G_δ 为所有可数个开集的交构成的集合, F_σ 为所有可数个闭集的并构成的集合。

命题 2.11

令 $E \subset \mathbb{R}^d$, 则如下命题等价:

- E Lebesgue 可测。
- E 是 G_δ 集差掉一个零测集。
- E 是 F_σ 集并上一个零测集。

命题 2.12

设 $E \subset \mathbb{R}^d$ 为 Lebesgue 可测集, $T: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ 为线性变换, 则

- $T(E)$ Lebesgue 可测。
- $m(T(E)) = |\det T| m(E)$

Problem 2.2 (勒贝格测度的唯一性)

证明勒贝格测度 $E \mapsto m(E)$ 是唯一一个从 Lebesgue 可测集到 $[0, +\infty]$ 的映射, 满足以下公理:

- (空集) $m(\emptyset) = 0$ 。
- (可数可加性) 若 $E_1, E_2, \dots \subset \mathbb{R}^d$ 是一列互不相交的 Lebesgue 可测集, 则

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n).$$

- (平移不变性) 若 E 是 Lebesgue 可测集且 $x \in \mathbb{R}^d$, 则 $m(E+x) = m(E)$ 。
- (归一化) $m([0, 1]^d) = 1$ 。

Problem 2.3 (勒贝格测度作为简单测度的完备化)

本习题旨在说明勒贝格测度在某种意义上可视为简单测度的度量完备化。为避免技术细节, 我们不在整个 $\mathbb{R}^d$ 中讨论, 而是固定某个简单集 A (例如 $A = [0, 1]^d$):

- 令 $2^A := \{E : E \subset A\}$ 为 A 的幂集。若两集合 $E, F \in 2^A$ 满足 $E \Delta F$ 是零测集, 则称其等价。证明这是一个等价关系。
- 令 $2^A / \sim$ 为 2^A 关于上述等价关系的等价类集合, 其中 $[E] := \{F \in 2^A : E \sim F\}$ 。定义两个等价类 $[E], [E']$ 之间的距离 $d : 2^A / \sim \times 2^A / \sim \rightarrow \mathbb{R}^+$ 为

$$d([E], [E']) := m^*(E \Delta E').$$

证明此距离是良定义的 (即当 $[E] = [F]$ 且 $[E'] = [F']$ 时, $m(E \Delta E') = m(F \Delta F')$), 并使得 $2^A / \sim$ 成为完备度量空间。

- 令 $\mathcal{E} \subset 2^A$ 为 A 的简单子集, $\mathcal{L} \subset 2^A$ 为 A 的 Lebesgue 可测子集。证明 $\mathcal{L} / \sim$ 是 $\mathcal{E} / \sim$ 关于上述度量的闭包。特别地, $\mathcal{L} / \sim$ 是一个完备度量空间, 且包含 $\mathcal{E} / \sim$ 作为其稠密子集; 即 $\mathcal{L} / \sim$ 是 $\mathcal{E} / \sim$ 的度量完备化。
- 证明 Lebesgue 测度 $m : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}^+$ 可降为连续函数 $m : \mathcal{L} / \sim \rightarrow \mathbb{R}^+$ (仍记为 m)。进一步证明, $m : \mathcal{L} / \sim \rightarrow \mathbb{R}^+$ 是简单测度函数 $m : \mathcal{E} / \sim \rightarrow \mathbb{R}^+$ 到 $\mathcal{L} / \sim$ 的唯一连续延拓。

2.3 Lebesgue 不可测集

3 Lebesgue 积分

本章中，我们将通过 Lebesgue 测度定义函数 $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 的 Lebesgue 积分

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx$$

3.1 简单函数的积分

定义 3.1

简单函数(simple function) $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ 形如

$$f = c_1 1_{E_1} + \cdots + c_k 1_{E_k}$$

其中 $E_i \subset \mathbb{R}^d$ 是 Lebesgue 可测集, $c_i \in \mathbb{C}$ 。

无符号简单函数(unsigned simple function) 为 $c_i \in [0, +\infty]$ 其余同上定义。

容易得到复值简单函数构成了向量空间 $\text{Simp}(\mathbb{R}^d)$, 且在乘法与共轭下封闭。无符号简单函数也同样构成了向量空间 $\text{Simp}^+(\mathbb{R}^d)$, 且为 $[0, +\infty]$ -模。

在该定义中, 我们并不要求 E_i 两两不交。事实上我们可以证明任意 k 个集合将 $\mathbb{R}^d$ 分成 2^k 个不交的部分, 于是 f 可以写成交互的 E'_i 的形式。

自然地希望对可测集 E 有

$$\int_{\mathbb{R}^d} 1_E(x) dx = m(E)$$

为了保证积分的性质, 我们如下定义无符号简单函数的积分:

定义 3.2

对 $f = c_1 1_{E_1} + \cdots + c_k 1_{E_k}$, 定义 f 的积分

$$\text{Simp} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx := c_1 m(E_1) + \cdots + c_k m(E_k)$$

引理 3.1 (良定义)

若 $c_1 1_{E_1} + \cdots + c_k 1_{E_k} = c'_1 1_{E'_1} + \cdots + c'_k 1_{E'_k}$, 则

$$c_1 m(E_1) + \cdots + c_k m(E_k) = c'_1 m(E'_1) + \cdots + c'_k m(E'_k)$$

定义 3.3

一个对 $x \in \mathbb{R}^d$ 的性质 $P(x)$ 称为几乎处处的(almost everywhere), 若不满足 $P(x)$ 的 x 构成的集合是零测集, 简记为 a.e.。

定义 3.4

f 的支集(support)定义为

$$\text{supp} f := \left\{ x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \neq 0 \right\}$$

命题 3.1 (简单函数积分的性质)

•

$$\text{Simp} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) + g(x) dx = \text{Simp} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx + \text{Simp} \int_{\mathbb{R}^d} g(x) dx$$

- 对 $c \in [0, +\infty]$, 有

$$\text{Simp} \int_{\mathbb{R}^d} cf(x) dx = c \times \text{Simp} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx$$

- $\text{Simp} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx$ 有限当且仅当 f 几乎处处有限且支集测度有限。
- $\text{Simp} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = 0$ 当且仅当 f 几乎处处为 0。
- 若 f 和 g 几乎处处相等, 则

$$\text{Simp} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = \text{Simp} \int_{\mathbb{R}^d} g(x) dx$$

- 若 $f \leq g$ 几乎处处成立, 则

$$\text{Simp} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx \leq \text{Simp} \int_{\mathbb{R}^d} g(x) dx$$

- 对任意 Lebesgue 可测集 E ,

$$\text{Simp} \int_{\mathbb{R}^d} 1_E(x) dx = m(E)$$

定义 3.5

称复值简单函数 $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ 为绝对可积的(absolute integrable), 若

$$\text{Simp} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| dx < \infty,$$

当 f 绝对可积时, 对于实值有符号函数, 其积分 $\text{Simp} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx$ 定义为:

$$\text{Simp} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx := \text{Simp} \int_{\mathbb{R}^d} f_+(x) dx - \text{Simp} \int_{\mathbb{R}^d} f_-(x) dx,$$

其中 $f_+(x) := \max(f(x), 0)$, $f_-(x) := \max(-f(x), 0)$ 。

对于复值函数, 其积分定义为:

$$\text{Simp} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx := \text{Simp} \int_{\mathbb{R}^d} \text{Re } f(x) dx + i \text{Simp} \int_{\mathbb{R}^d} \text{Im } f(x) dx.$$

命题 3.2

设 $f, g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ 为绝对可积简单函数。

•

$$\text{Simp} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) + g(x) dx = \text{Simp} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx + \text{Simp} \int_{\mathbb{R}^d} g(x) dx$$

• 对 $c \in \mathbb{C}$, 有

$$\text{Simp} \int_{\mathbb{R}^d} cf(x) dx = c \times \text{Simp} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx$$

•

$$\text{Simp} \int_{\mathbb{R}^d} \bar{f}(x) dx = \overline{\text{Simp} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx}$$

• 若 f 和 g 几乎处处相等, 则

$$\text{Simp} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = \text{Simp} \int_{\mathbb{R}^d} g(x) dx$$

3.2 可测函数**定义 3.6**

一个无符号函数 $f: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, +\infty]$ 称为无符号 **Lebesgue** 可测的(**unsigned Lebesgue measurable**), 或者 **Lebesgue** 可测的, 若有一列无符号函数逐点收敛于 f , 即存在无符号简单函数 $f_1, f_2, \dots: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, +\infty]$ 满足对任意 $x \in \mathbb{R}^d$, $f_n(x) \rightarrow f(x)$ 。

虽然这个定义往往无法直接被验证, 但是所幸我们有如下等价形式:

引理 3.2

令 $f: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, +\infty]$ 为无符号函数, 则如下命题等价:

- f 是无符号 Lebesgue 可测函数。
- 存在一系列无符号简单函数 f_n 逐点收敛于 f 。
- 存在一系列无符号简单函数 f_n 几乎处处逐点收敛于 f 。
- $f(x) = \sup_n f_n(x)$ 为一列不减有界且支集测度有限的无符号简单函数 f_n 的上确界。
- 对任意 $\lambda \in [0, +\infty]$, $\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) > \lambda\}$ Lebesgue 可测。
- 对任意 $\lambda \in [0, +\infty]$, $\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \geq \lambda\}$ Lebesgue 可测。
- 对任意 $\lambda \in [0, +\infty]$, $\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) < \lambda\}$ Lebesgue 可测。
- 对任意 $\lambda \in [0, +\infty]$, $\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \leq \lambda\}$ Lebesgue 可测。
- 对任意区间 $I \subset [0, +\infty]$, $f^{-1}(I) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \in I\}$ Lebesgue 可测。
- 对任意开集 $U \subset [0, +\infty)$, $f^{-1}(U) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \in U\}$ Lebesgue 可测。
- 对任意闭集 $K \subset [0, +\infty)$, $f^{-1}(K) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \in K\}$ Lebesgue 可测。

命题 3.3

- 任意连续函数 $f: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, +\infty]$ 是可测的。
- 任意无符号简单函数是可测的。
- 无符号函数的 $\sup$ 、 $\inf$ 、 $\limsup$ 、 $\liminf$ 是可测的。
- 若一个无符号函数与一个无符号可测函数几乎处处相等, 则是可测的。
- 一系列无符号可测函数几乎处处逐点收敛于无符号函数 f , 则 f 是可测的。
- 若 $f: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, +\infty]$ 可测, $\phi: [0, +\infty] \rightarrow [0, +\infty]$ 连续, 则 $\phi \circ f: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, +\infty]$ 可测。
- 若 f, g 是无符号可测函数, 则 $f + g$ 和 fg 是可测的。

Problem 3.1

设 $f: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, +\infty]$, 证明 f 是有界无符号可测函数当且仅当存在一系列有界简单函数一致收敛于 f 。

定义 3.7

一个几乎处处有定义的复值函数 $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ 称为 **Lebesgue 可测的**, 若存在一系列复值简单函数几乎处处逐点收敛于 f 。

类似的, 我们有如下等价形式:

引理 3.3

令 $f: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, +\infty]$ 为几乎处处有定义的复值函数, 则如下命题等价:

- f 是无符号 Lebesgue 可测函数。
- 存在一系列复值简单函数 f_n 几乎处处逐点收敛于 f 。
- $\Re f$ 与 $\Im f$ 是无符号可测函数。
- 对任意开集 $U \subset \mathbb{C}$, $f^{-1}(U) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \in U\}$ Lebesgue 可测。
- 对任意闭集 $K \subset \mathbb{C}$, $f^{-1}(K) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \in K\}$ Lebesgue 可测。

命题 3.4

- 所有连续函数 $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ 是可测的。
- $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ 是简单的当且仅当 f 可测且取值有限。
- 若一个复值函数与一个可测函数几乎处处相等, 则是可测的。
- 一系列复值可测函数几乎处处逐点收敛于复值函数 f , 则 f 是可测的。
- 若 $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ 可测, $\phi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 连续, 则 $\phi \circ f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ 可测。
- 若 f, g 是可测函数, 则 $f + g$ 和 fg 是可测的。

3.3 无符号 Lebesgue 积分

定义 3.8

令 $f: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, +\infty]$ 为无符号函数, 定义无符号 Lebesgue 下积分(lower unsigned Lebesgue integral) 为

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx := \sup_{\substack{0 \leq g \leq f \\ g \text{ simple}}} \text{Simp} \int_{\mathbb{R}^d} g(x) dx$$

同理定义无符号 Lebesgue 上积分(upper unsigned Lebesgue integral) 为

$$\overline{\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx} := \inf_{\substack{h \geq f \\ h \text{ simple}}} \text{Simp} \int_{\mathbb{R}^d} h(x) dx$$

命题 3.5

令 $f, g: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, +\infty]$ 为无符号函数。

- 若 f 是简单函数, 则

$$\overline{\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx} = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = \text{Simp} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx$$

- 若 $f \leq g$ 几乎处处成立, 则

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} g(x) dx \quad \overline{\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx} \leq \overline{\int_{\mathbb{R}^d} g(x) dx}$$

- 若 $c \in [0, +\infty)$, 则

$$\int_{\mathbb{R}^d} cf(x) dx = c \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx$$

- 若 f, g 几乎处处相等, 则

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} g(x) dx \quad \overline{\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx} = \overline{\int_{\mathbb{R}^d} g(x) dx}$$

•

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) + g(x) dx \geq \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx + \int_{\mathbb{R}^d} g(x) dx$$

•

$$\overline{\int_{\mathbb{R}^d} f(x) + g(x) dx} \leq \overline{\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx} + \overline{\int_{\mathbb{R}^d} g(x) dx}$$

- 对可测集 E , 有

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) 1_E(x) dx + \int_{\mathbb{R}^d} f(x) 1_{\mathbb{R}^d \setminus E}(x) dx$$

•

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \min(f(x), n) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx$$

•

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) 1_{|x| \leq n} dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx$$

- 若 $f + g$ 是有界简单函数且支集测度有限, 则

$$\text{Simp} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) + g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx + \overline{\int_{\mathbb{R}^d} g(x) dx}$$

定义 3.9

若 $f: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, +\infty]$ 是可测函数, 定义其无符号积分为无符号 Lebesgue 下积分 $\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx$

命题 3.6

设 $f: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, +\infty]$ 为有界可测集且支集测度有限, 则其上积分与下积分相同。

推论 3.1

令 $f, g: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, +\infty]$ 是可测的, 则

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) + g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx + \int_{\mathbb{R}^d} g(x) dx$$

Problem 3.2 (勒贝格积分的唯一性)

证明勒贝格积分 $f \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx$ 是唯一一个从可测无符号函数 $f: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, +\infty]$ 到 $[0, +\infty]$ 的映射, 满足以下性质:

- (与简单积分的相容性) 若 f 是简单函数, 则

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = \text{Simp} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx.$$

- (有限可加性)

$$\int_{\mathbb{R}^d} (f(x) + g(x)) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx + \int_{\mathbb{R}^d} g(x) dx.$$

- (水平截断)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \min(f(x), n) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx.$$

- (垂直截断)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \cdot \mathbf{1}_{|x| \leq n} dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx.$$

Problem 3.3 (线性变量替换)

设 $f: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, +\infty]$ 为可测函数, $T: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ 为可逆线性变换。证明:

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(T^{-1}(x)) dx = |\det T| \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx,$$

或等价地,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(Tx) dx = \frac{1}{|\det T|} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx.$$

引理 3.4 (Markov 不等式)

令 $f: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, +\infty]$ 是可测的, 则对任意 $0 < \lambda < \infty$, 有

$$m\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \geq \lambda\right\}\right) \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx$$

命题 3.7

令 $f: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, +\infty]$ 是可测函数.

- $\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx < \infty$ 当且仅当 f 几乎处处有限。
- $\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = 0$ 当且仅当 f 几乎处处为 0。

3.4 绝对可积性**定义 3.10**

几乎处处有定义的可测函数 $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ 称为**绝对可积的(absolutely integrable)**, 若

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} := \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| dx$$

是有限的。 $\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$ 称为 f 的 $L^1(\mathbb{R}^d)$ **范数**, 并用 $L^1(\mathbb{R}^d)$ 或 $L^1(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C})$ 表示绝对可积函数空间。

若 f 是实值且绝对可积的, 则其勒贝格积分 $\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx$ 定义为

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx := \int_{\mathbb{R}^d} f_+(x) dx - \int_{\mathbb{R}^d} f_-(x) dx,$$

若 f 是复值且绝对可积的, 则其勒贝格积分 $\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx$ 定义为

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx := \int_{\mathbb{R}^d} \operatorname{Re} f(x) dx + i \int_{\mathbb{R}^d} \operatorname{Im} f(x) dx,$$

命题 3.8

设 $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C})$, 则

•

$$\|f + g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$$

•

$$\|cf\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = |c| \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$$

•

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) + g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx + \int_{\mathbb{R}^d} g(x) dx$$

•

$$\int_{\mathbb{R}^d} cf(x) dx = c \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx$$

•

$$\int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(x)} dx = \overline{\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx}$$

注: 若我们在 $L^1(\mathbb{R}^d)$ 上定义距离 $d_{L^1}(f, g) := \|f - g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$, 则 $(L^1(\mathbb{R}^d), d)$ 为度量空间。

Problem 3.4

设 $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ 是复数列, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 由下式给出:

$$f(x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n 1_{[n, n+1)}(x) = c_{[x]}$$

证明 f 绝对可积当且仅当 $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n$ 绝对收敛, 在该条件下

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n$$

Problem 3.5

若 E, F 为 $\mathbb{R}^d$ 的不交可测集, 且 $f: E \cup F \rightarrow \mathbb{C}$ 是可测的, 证明

•

$$\int_E f(x) dx = \int_{E \cup F} f(x) 1_E(x) dx$$

•

$$\int_E f(x) dx + \int_F f(x) dx = \int_{E \cup F} f(x) dx$$

引理 3.5 (三角不等式)

令 $f \in L^1(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C})$, 则

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| dx$$

3.5 小木头三主角

Littlewood 三原则是一组非正式的启发式准则, 概括了勒贝格测度论背后的基本直觉。简而言之, 这三个原则如下:

- 每个可测集几乎是一个区间的有限和;
- 每个绝对可积函数几乎连续;
- 每个逐点收敛的函数序列几乎一致收敛。

前文给出了第一原则的多种表现形式。现在我们转向第二原则。

定义 3.11

阶梯函数(step function)为长方体 B 的示性函数 1_B 的有限线性组合。

定理 3.1 (L^1 函数的逼近)

设 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ 且 $\varepsilon > 0$ 。

- 存在绝对可积的简单函数 g , 使得

$$\|f - g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon.$$

- 存在阶梯函数 g , 使得

$$\|f - g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon.$$

- 存在连续且紧支集的函数 g , 使得

$$\|f - g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon.$$

定义 3.12

称一系列函数 $f_n : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ **局部一致(locally uniformly)**收敛于 $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$, 若对任意有界集 $E \subset \mathbb{R}^d$, f_n 在 E 上一致收敛于 f 。

定理 3.2 (Egorov 定理)

令一系列可测函数 $f_n : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ 几乎处处逐点收敛于 $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 Lebesgue 可测集 A , $m(A) \leq \varepsilon$ 满足 f_n 在 $\mathbb{R}^d \setminus A$ 上局部一致收敛于 f 。

定理 3.3 (Lusin 定理)

令 $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ 为绝对可积函数, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 Lebesgue 可测集 $E \subset \mathbb{R}^d$, $m(E) \leq \varepsilon$, 满足 f 在 $\mathbb{R}^d \setminus E$ 上连续。

4 抽象测度空间

至此，我们对测度的讨论都在 $\mathbb{R}^d$ 上，下面我们考虑更一般的空间 X 上的测度。

4.1 Boolean 代数

定义 4.1

设 X 为任意集合。 X 上的 **Boolean 代数** 为 X 的子集族 $\mathcal{B}$ 满足：

- $\emptyset \in \mathcal{B}$ 。
- 若 $E \in \mathcal{B}$ ，则 $E^c := X \setminus E \in \mathcal{B}$ 。
- 若 $E, F \in \mathcal{B}$ ，则 $E \cup F \in \mathcal{B}$ 。

例 4.1 (Atomic algebra)

将空间 X 分成不交的集合 $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ ，这里 A_α 称作 **原子(atom)**。这些集合生成 Boolean 代数 $\mathcal{A} := \left\{ \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha \mid J \subset I \right\}$ ，称作 **原子代数**。

命题 4.1

设 $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha \in I}$ 为 X 的一族 Boolean 代数，则 $\bigwedge_{\alpha \in I} \mathcal{B}_\alpha := \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{B}_\alpha$ 也为 Boolean 代数。

定义 4.2

令 $\mathcal{F}$ 为 X 的子集族，定义 $\langle \mathcal{F} \rangle_{\text{bool}}$ 为所有包含 $\mathcal{F}$ 的 Boolean 代数的交。称之为 $\mathcal{F}$ 生成的 Boolean 代数。

4.2 σ -代数和可测空间

定义 4.3 (σ -代数)

设 X 为任意集合。 X 上的 σ -代数 为 X 的子集族 $\mathcal{B}$ 满足：

- $\emptyset \in \mathcal{B}$ 。
- 若 $E \in \mathcal{B}$ ，则 $E^c := X \setminus E \in \mathcal{B}$ 。
- 若 $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{B}$ ，则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{B}$ 。

命题 4.2

设 $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha \in I}$ 为 X 的一族 σ -代数，则 $\bigwedge_{\alpha \in I} \mathcal{B}_\alpha := \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{B}_\alpha$ 也为 σ -代数。

定义 4.4

令 $\mathcal{F}$ 为 X 的子集族，定义 $\langle \mathcal{F} \rangle$ 为所有包含 $\mathcal{F}$ 的 σ -代数的交。称之为 $\mathcal{F}$ 生成的 σ -代数。

定义 4.5

令 X 为度量空间, 由 X 中所有开集生成的 σ -代数称为 X 的 **Borel σ -代数**, 记作 $\mathcal{B}[X]$, 其中的元素称为 **Borel 可测的**。

命题 4.3

$\mathcal{B}[\mathbb{R}^d]$ 是由下任意一者生成的 σ -代数:

- $\mathbb{R}^d$ 中的开集;
- $\mathbb{R}^d$ 中的闭集;
- $\mathbb{R}^d$ 中的紧集;
- $\mathbb{R}^d$ 中的开球;
- $\mathbb{R}^d$ 中的长方体;
- $\mathbb{R}^d$ 中的简单集合。

$(X, \mathcal{B})$ 称为可测空间(measurable space)。

4.3 可数可加测度和测度空间**定义 4.6**

设 $\mathcal{B}$ 是空间 X 上的 Boolean 代数, 一个 $\mathcal{B}$ 上的(无符号)有限可加测度(finitely additive measure) μ 为映射 $\mu: \mathcal{B} \rightarrow [0, +\infty]$ 满足:

- $\mu(\emptyset) = 0$ 。
- 对不交的 $E, F \in \mathcal{B}$, $\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F)$ 。

定义 4.7

设 $\mathcal{B}$ 是空间 X 上的 Boolean 代数, 一个 $\mathcal{B}$ 上的(无符号)可数可加测度(countably additive measure) μ 为映射 $\mu: \mathcal{B} \rightarrow [0, +\infty]$ 满足:

- $\mu(\emptyset) = 0$ 。
- 对不交的 $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{B}$, $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ 。

$(X, \mathcal{B}, \mu)$ 称为测度空间(measure space)。

命题 4.4

设 $(X, \mathcal{B})$ 是可测空间。

- 若 μ 是 $\mathcal{B}$ 的可数可加测度, $c \in [0, +\infty]$, 则 $c\mu$ 也是可数可加测度。
- 若 $\mu_1, \mu_2, \dots$ 是 $\mathcal{B}$ 的可数可加测度, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n: E \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(E)$ 也是可数可加测度。

命题 4.5

设 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 是测度空间。

- (可数次可加性) 对 $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{B}$, $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ 。
- (向上单调收敛) 若 $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ 是 $\mathcal{B}$ -可测的, 则

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) = \sup_n \mu(E_n)$$

- (向下单调收敛) 若 $E_1 \supset E_2 \supset \dots$ 是 $\mathcal{B}$ -可测的, 且至少一个 $\mu(E_n) < \infty$, 则

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) = \inf_n \mu(E_n)$$

定义 4.8

测度空间 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 中测度为零的 $\mathcal{B}$ -可测集称为**零测集(null set)**。零测集的子集称为**子零测集(sub-null set)**。一个测度空间称为**完备的(complete)**, 若任意子零测集都是零测集。

命题 4.6

测度空间 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 存在唯一的完备测度空间 $(X, \bar{\mathcal{B}}, \bar{\mu})$ 。事实上,

$$\bar{\mathcal{B}} = \left\{ B \setminus N \mid B \in \mathcal{B}, N \text{ 为 } \mathcal{B}\text{-子零测} \right\}$$

命题 4.7

Lebesgue 测度空间 $(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}[\mathbb{R}^d], m)$ 是 Borel 测度空间 $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}[\mathbb{R}^d], m)$ 的完备。

4.4 测度空间上的可测函数与积分**定义 4.9**

设 $(X, \mathcal{B})$ 为可测空间, $f: X \rightarrow [0, +\infty]$ 或 $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ 为无符号或复值函数。称 f 是可测的若任意开集 $U \subset [0, +\infty]$ 或 $\mathbb{C}$, $f^{-1}(U)$ 是 $\mathcal{B}$ -可测的。

命题 4.8

设 $(X, \mathcal{B})$ 是可测空间。

- $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ 可测当且仅当对任意 $\left\{x \in X \mid f(x) > \lambda\right\}$ 是 $\mathcal{B}$ -可测的。
- 示性函数 1_E 可测当且仅当 E 是 $\mathcal{B}$ -可测。
- $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ 或 $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ 为无符号或复值函数, f 是可测的当且仅当任意 Borel-可测集 $E \subset [0, +\infty]$ 或 $\mathbb{C}$, $f^{-1}(E)$ 是 $\mathcal{B}$ -可测的。
- $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ 是可测的当且仅当实部和虚部都是可测的。
- $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ 是可测的当且仅当 f_+ 和 f_- 都是可测的。
- 若 $f_n : X \rightarrow [0, \infty]$ 是一列可测函数逐点收敛于 $f : X \rightarrow [0, +\infty]$, 则 f 可测。将 $[0, +\infty]$ 改成 $\mathbb{C}$ 命题也成立。
- $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ 是可测函数, $\phi : [0, +\infty] \rightarrow [0, +\infty]$ 连续, 则 $\phi \circ f$ 是可测函数。将 $[0, +\infty]$ 改成 $\mathbb{C}$ 命题也成立。
- 证明两个 $[0, +\infty]$ 或 $\mathbb{C}$ 上的可测函数的和或积还是可测函数。

定理 4.1 (Egorov 定理)

令 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 为有限测度空间, $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ 为一列可测函数几乎处处逐点收敛于 $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, 对任意 $\epsilon > 0$, 存在可测集 E , $\mu(E) \leq \epsilon$ 满足 f_n 在 E 外一致收敛于 f 。

定义 4.10

可测空间 $(X, \mathcal{B})$ 上的简单函数 $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ 为可测函数且取值 $a_1, \dots, a_k$ 有限。定义积分

$$\text{Simp} \int_X f d\mu := \sum_{j=1}^k a_j \mu(f^{-1}(\{a_j\}))$$

命题 4.9

设 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 为测度空间, $f, g: X \rightarrow [0, +\infty]$ 是简单函数。

- 若 $f \leq g$, 则

$$\text{Simp} \int_X f d\mu \leq \text{Simp} \int_X g d\mu$$

- 对任意 $\mathcal{B}$ -可测集 E , 有

$$\text{Simp} \int_X 1_E d\mu = \mu(E)$$

- 对任意 $c \in [0, +\infty]$, 有

$$\text{Simp} \int_X c f d\mu = c \times \text{Simp} \int_X f d\mu$$

•

$$\text{Simp} \int_X (f + g) d\mu = \text{Simp} \int_X f d\mu + \text{Simp} \int_X g d\mu$$

- 若 $(X, \mathcal{B}', \mu')$ 是 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 的加细, 即 $\mathcal{B}' \supset \mathcal{B}$ 且 $\mu'|_{\mathcal{B}} = \mu$, 则

$$\text{Simp} \int_X f d\mu = \text{Simp} \int_X f d\mu'$$

- 若 f, g 在测度 μ 意义下几乎处处相等, 则

$$\text{Simp} \int_X f d\mu = \text{Simp} \int_X g d\mu$$

- $\text{Simp} \int_X f d\mu < \infty$ 当且仅当 f 几乎处处有限且支集测度有限。
- $\text{Simp} \int_X f d\mu = 0$ 当且仅当 f 几乎处处为 0。

定义 4.11

令 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 是测度空间, $f: X \rightarrow [0, +\infty]$ 可测, 则我们定义

$$\int_X f d\mu = \sup_{\substack{0 \leq g \leq f \\ g \text{ 简单函数}}} \text{Simp} \int_X g d\mu$$

命题 4.10

令 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 是测度空间, $f, g: X \rightarrow [0, +\infty]$ 是可测函数。

- 若 $f = g$ 几乎处处成立, 则

$$\int_X f d\mu = \int_X g d\mu$$

- 若 $f \leq g$ 几乎处处成立, 则

$$\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$$

- 对任意 $c \in [0, +\infty]$, 有

$$\int_X c f d\mu = c \times \int_X f d\mu$$

-

$$\int_X (f + g) d\mu \geq \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$$

- 若 f 是简单函数, 则

$$\text{Simp} \int_X f d\mu = \int_X f d\mu$$

- (Markov 不等式) 对任意 $0 < \lambda < \infty$, 有

$$\mu\left(\left\{x \in X \mid f(x) \geq \lambda\right\}\right) \leq \frac{1}{\lambda} \int_X f d\mu$$

- $\int_X f d\mu < \infty$ 当且仅当 f 几乎处处有限且支集测度有限。

- $\int_X f d\mu = 0$ 当且仅当 f 几乎处处为 0。

-

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \min(f, n) d\mu = \int_X f d\mu$$

- 设 $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ 是 $\mathcal{B}$ -可测集, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f 1_{E_n} d\mu = \int_X f 1_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} d\mu$$

- 设 Y 是 X 的可测子集, 则

$$\int_X f 1_X d\mu = \int_Y f|_Y d\mu|_Y$$

定理 4.2

令 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 是测度空间, $f, g: X \rightarrow [0, +\infty]$ 是可测函数。则

$$\int_X (f + g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$$

定义 4.12

从一个可测空间 $(X, \mathcal{B})$ 到另一个可测空间 $(Y, \mathcal{C})$ 的可测态射(**measurable morphism**) f 为一个函数 $f: X \rightarrow Y$, 满足对每个 $\mathcal{C}$ -可测集 E , 原像 $f^{-1}(E)$ 是 $\mathcal{B}$ -可测的。

命题 4.11

令 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 是测度空间, $\phi: X \rightarrow Y$ 是可测态射, 定义 ϕ 对 μ 的拉回 $\phi_*\mu: \mathcal{C} \rightarrow [0, +\infty]$ 为 $\phi_*\mu(E) := \mu(\phi^{-1}(E))$ 。

- $\phi_*\mu$ 是 $\mathcal{C}$ 上的测度, 即 $(Y, \mathcal{C}, \phi_*\mu)$ 是测度空间。
- 若 $f: Y \rightarrow [0, +\infty]$ 可测, 则

$$\int_Y f d\phi_*\mu = \int_X (f \circ \phi) d\mu$$

定义 4.13

令 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 是测度空间, 可测函数 $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ 称为**绝对可积的**, 若

$$\|f\|_{L^1(X, \mathcal{B}, \mu)} := \int_X |f| d\mu$$

有限, 并用 $L^1(X, \mathcal{B}, \mu), L^1(X), L^1(\mu)$ 表示绝对可积函数空间。

若 f 是实值且绝对可积的, 则其积分 $\int_X f(x) d\mu$ 定义为

$$\int_X f(x) d\mu := \int_X f_+(x) d\mu - \int_X f_-(x) d\mu,$$

若 f 是复值且绝对可积的, 则其积分 $\int_X f(x) d\mu$ 定义为

$$\int_X f(x) d\mu := \int_X \operatorname{Re} f(x) d\mu + i \int_X \operatorname{Im} f(x) d\mu,$$

4.5 收敛定理**定理 4.3 (单调收敛定理)**

令 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 是测度空间, $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$ 为 X 上的单调不减的无符号可测函数列, 则我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu$$

推论 4.1

令 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 是测度空间, $f_1, f_2, \dots: X \rightarrow [0, +\infty]$ 为一列无符号可测函数, 则

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu$$

推论 4.2 (Borel-Cantelli lemma)

令 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 是测度空间, $E_1, E_2, \dots$ 为一列 $\mathcal{B}$ -可测集满足

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$$

则几乎所有的 $x \in X$ 仅被包含于有限个 E_n 中。

推论 4.3 (Fatou's lemma)

令 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 是测度空间, $f_1, f_2, \dots : X \rightarrow [0, +\infty]$ 为一列无符号可测函数, 则

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$$

定理 4.4 (控制收敛定理)

令 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 是测度空间, $f_1, f_2, \dots : X \rightarrow \mathbb{C}$ 为一列可测函数且几乎处处逐点收敛于可测函数 $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ 。设存在无符号绝对收敛函数 $G : X \rightarrow [0, +\infty]$ 满足对任意 n , $|f_n| \leq G$ 几乎处处成立, 则我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

5 收敛模式

定义 5.1

- 称序列 f_n **逐点收敛(pointwise)**到 f , 若对每个 $x \in X$, 有 $f_n(x)$ 收敛到 $f(x)$ 。换言之, 对任意 $\varepsilon > 0$ 和 $x \in X$, 存在 N , 使得当 $n \geq N$ 时,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

- 称序列 f_n **一致收敛(uniformly)**到 f , 若对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N , 使得当 $n \geq N$ 时, 对所有 $x \in X$,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

两者的区别在于后者要求 N 的选择必须与 x 无关, 而是对全体 $x \in X$ 一致成立。

定义 5.2

令 $(X, \mathbb{B}, \mu)$ 是测度空间, f_n 是可测函数且极限 f 可测。

- 我们称 f_n **几乎处处逐点收敛(a.e pointwise)**到 f , 如果对于 μ -几乎处处的 $x \in X$, $f_n(x)$ 收敛到 $f(x)$ 。
- 我们称 f_n **几乎处处一致收敛(a.e uniform)**或在 L^∞ 范数下收敛到 f , 如果对于每个 $\varepsilon > 0$, 存在 N 使得对任意 $n \geq N$, 在 μ -几乎处处的 $x \in X$ 有 $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ 。
- 我们称 f_n **几乎一致收敛(a.u.)**到 f , 如果对于每个 $\varepsilon > 0$, 存在可测集 $E \in \mathcal{B}$ 满足 $\mu(E) \leq \varepsilon$, 使得 f_n 在 E^c 上一致收敛于 f 。
- 我们称 f_n 在 L^1 范数下收敛到 f , 如果

$$\|f_n - f\|_{L^1(\mu)} = \int_X |f_n(x) - f(x)| d\mu$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时收敛到 0。

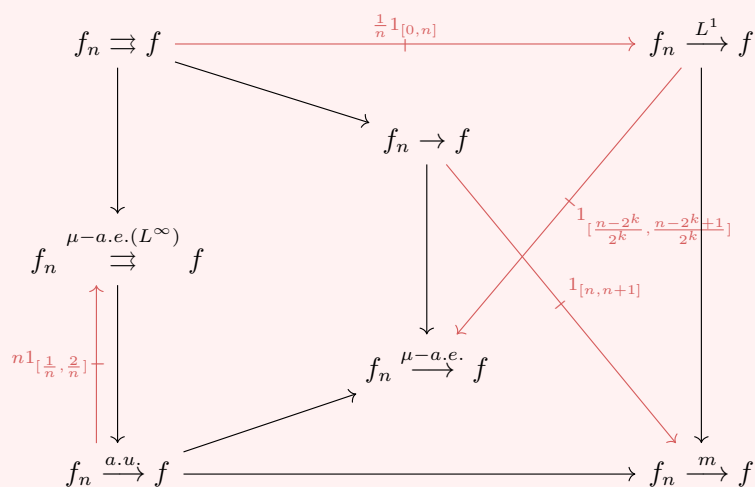
- 我们称 f_n **依测度收敛(measure)**到 f , 如果对于每个 $\varepsilon > 0$, 测度

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\})$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时收敛到 0。

命题 5.1

我们有如下关系：

**5.1 唯一性****命题 5.2**

设 $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ 为一列可测函数，设 f, g 为另外两个可测函数。设 f_n 依上述七种模式之一收敛于 f ，依另一种收敛于 g ，则 $f = g$ 几乎处处成立。

5.2 阶梯函数的情形

命题 5.3

考虑 $f_n = A_n 1_{E_n}$ 。令 $E_N^* = \bigcup_{n>N} E_n$ 。

•

$$f_n \rightrightarrows 0 \iff \lim_{n \rightarrow 0} A_n = 0$$

•

$$f_n \xrightarrow{L^\infty} 0 \iff \lim_{n \rightarrow 0} A_n = 0$$

•

$$f_n \xrightarrow{a.u.} 0 \iff \lim_{n \rightarrow 0} A_n = 0 \text{ 或 } \lim_{N \rightarrow \infty} \mu(E_N^*) = 0$$

•

$$f_n \rightarrow 0 \iff \lim_{n \rightarrow 0} A_n = 0 \text{ 或 } \bigcap_{N=1}^{\infty} E_N^* = \emptyset$$

•

$$f_n \xrightarrow{a.e.} 0 \iff \lim_{n \rightarrow 0} A_n = 0 \text{ 或 } \mu\left(\bigcap_{N=1}^{\infty} E_N^*\right) = 0$$

•

$$f_n \xrightarrow{m} 0 \iff \lim_{n \rightarrow 0} A_n = 0 \text{ 或 } \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) = 0$$

•

$$f_n \xrightarrow{L^1} 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \int A_n \mu(E_n) = 0$$

5.3 有限测度空间

定理 5.1 (Egorov 定理)

令 X 有有限测度, $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$, $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ 为可测函数, 则 $f_n \xrightarrow{a.e.} f$ 当且仅当 $f_n \rightrightarrows f$ 。

5.4 快速收敛

命题 5.4 (快速 L^1 收敛)

设 $f_n, f : X \rightarrow \mathbb{C}$ 为可测函数, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n - f\| < \infty$, 则

$$\bullet f_n \xrightarrow{a.e.} f$$

$$\bullet f_n \xrightarrow{a.u.} f$$

推论 5.1

设 $f_n, f : X \rightarrow \mathbb{C}$ 为可测函数, $f_n \xrightarrow{L^1} f$, 则存在子列 $f_{n_j} \xrightarrow{a.u.} f$ 。

命题 5.5

设 $f_n, f: X \rightarrow \mathbb{C}$ 为可测函数, $f_n \xrightarrow{m} f$, 则存在子列 $f_{n_j} \xrightarrow{a.u.} f$ 。

5.5 一致可积**定义 5.3**

一列绝对可积函数 $f_n: X \rightarrow \mathbb{C}$ 称为一致可积(uniformly integrable), 若满足:

•

$$\sup_n \|f_n\|_{L^1(\mu)} = \sup_n \int_X |f_n| d\mu < +\infty$$

•

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \sup_n \int_{|f_n| \geq M} |f_n| d\mu = 0$$

•

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_n \int_{|f_n| \leq \delta} |f_n| d\mu = 0$$

命题 5.6

X 有限测度, $1 < p < \infty$, 设 $f_n: X \rightarrow \mathbb{C}$ 为一列可测函数满足 $\sup_n \int_X |f_n|^p d\mu < \infty$ 。则 f_n 是一致可积的。

命题 5.7

设 $f_n: X \rightarrow \mathbb{C}$ 为一列可测函数满足 $\sup_n \int_X |f_n|^p d\mu < \infty$, 设对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得对任意 $n \geq 1$ 与可测集 E 满足 $\mu(E) \leq \delta$, 有

$$\int_E |f_n| d\mu < \varepsilon$$

则 f_n 一致可积。

定理 5.2

设 $f_n: X \rightarrow \mathbb{C}$ 为一致可积函数, $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ 为另一函数。则 $f_n \xrightarrow{L^1} f$ 当且仅当 $f_n \xrightarrow{m} f$ 。

命题 5.8 (单调收敛定理)

设 $f_n: X \rightarrow \mathbb{C}$ 为一列单调不减可测函数, 满足 $\sup_n \int_X |f_n| < \infty$ 。则 $f_n \xrightarrow{L^1} \sup_n f_n$ 。

命题 5.9

设 $f_n: X \rightarrow \mathbb{C}$ 为被控制的一列可测函数, $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ 为另一个可测函数, 则 $f_n \xrightarrow{a.e.} f$ 当且仅当 $f_n \xrightarrow{a.u.} f$ 。

6 外测度、预测度和积测度

6.1 外测度与 Caratheodory 扩张定理

定义 6.1 (抽象外测度)

令 X 为集合, 抽象外测度(**abstract outer measure**)为映射 $\mu^* : 2^X \rightarrow [0, +\infty]$ 满足:

- $\mu^*(\emptyset) = 0$
- 若 $E \subset F$, 则 $\mu^*(E) \leq \mu^*(F)$
- 若 $E_1, E_2, \dots \subset X$, 则

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$$

定义 6.2 (Caratheodory 可测)

设 μ^* 为 X 的外测度, $E \subset X$ 称作 **Caratheodory 可测的**, 若对任意 $A \subset X$ 有

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E)$$

定理 6.1 (Caratheodory 扩张定理)

令 $\mu^* : 2^X \rightarrow [0, +\infty]$ 为 X 的外测度, $\mathcal{B}$ 为 X 的所有 Caratheodory 可测集, 令 $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, +\infty]$ 为 μ^* 在 $\mathcal{B}$ 上的限制。则 $\mathcal{B}$ 是 σ -代数, μ 是测度。

6.2 预测度

定义 6.3

Boolean 代数 $\mathcal{B}_0$ 的预测度(**pre-measure**)为有限可加测度 $\mu_0 : \mathcal{B}_0 \rightarrow [0, +\infty]$ 满足 $\mu_0(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(E_n)$ 对任意不交的集合 $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{B}_0$ 且 $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{B}_0$ 成立。

命题 6.1

- 上述定义中的有限可加可改成 $\mu_0(\emptyset) = 0$ 。
- 上述定义中的 $\mu_0(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(E_n)$ 可改成 $\mu_0(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(E_n)$
- 这两者不能同时更改。

定理 6.2 (Hahn-Kolmogorov 扩张)

任意 Boolean 代数 $\mathcal{B}_0$ 上的预测度 $\mu_0 : \mathcal{B}_0 \rightarrow [0, +\infty]$ 可扩张为可数可加测度 $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, +\infty]$

注: 若加上 μ_0 是 σ -有限的条件, 则该扩张唯一。

命题 6.2

设预测度 $\mu_0 : \mathcal{B}_0 \rightarrow [0, +\infty]$ σ -有限(即 X 是 $\mathcal{B}_0$ 中可数个测度有限集合的并), 令 $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, +\infty]$ 为其 Hahn-Kolmogorov 扩张。

- 若 $E \in \mathcal{B}$, 则存在 $E \subset F \in \langle \mathcal{B}_0 \rangle$ 满足 $\mu(F \setminus E) = 0$ 。
- 若 $E \in \mathcal{B}$ 测度有限, 对任意 $\varepsilon > 0$ 存在 $F \in \mathcal{B}_0$ 满足 $\mu(E \triangle F) \leq \varepsilon$ 。
- 反过来, 若 E 满足对任意 $\varepsilon > 0$ 存在 $F \in \mathcal{B}_0$ 满足 $\mu(E \triangle F) \leq \varepsilon$, 则 $E \in \mathcal{B}$ 。

6.3 积测度**定义 6.4**

设 $(X, \mathcal{B}_X), (Y, \mathcal{B}_Y)$ 是可测空间, 考虑投影 $\pi_X : X \times Y \rightarrow X$ 与 $\pi_Y : X \times Y \rightarrow Y$, 定义拉回

$$\pi_X^*(\mathcal{B}_X) := \left\{ \pi_X^{-1}(E) \mid E \in \mathcal{B}_X \right\} = \left\{ E \times Y \mid E \in \mathcal{B}_X \right\}$$

$$\pi_Y^*(\mathcal{B}_Y) := \left\{ \pi_Y^{-1}(F) \mid F \in \mathcal{B}_Y \right\} = \left\{ X \times F \mid F \in \mathcal{B}_Y \right\}$$

于是我们可以定义 $X \times Y$ 上的 σ -积代数 (product σ -algebra $\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y$:

$$\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y := \langle \pi_X^*(\mathcal{B}_X) \cup \pi_Y^*(\mathcal{B}_Y) \rangle$$

命题 6.3

设 $(X, \mathcal{B}_X)$ 和 $(Y, \mathcal{B}_Y)$ 为可测空间。

- $\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y$ 是由集合 $E \times F$ (其中 $E \in \mathcal{B}_X, F \in \mathcal{B}_Y$) 生成的 σ -代数。换言之, $\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y$ 是 $X \times Y$ 上最粗糙的 σ -代数, 使得 $\mathcal{B}_X$ -可测集与 $\mathcal{B}_Y$ -可测集的笛卡尔积始终是 $\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y$ -可测的。
- $\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y$ 是 $X \times Y$ 上最粗糙的 σ -代数, 使得投影映射 π_X, π_Y 均为可测态射。
- 若 $E \in \mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y$, 则对每个 $x \in X$, 集合 $E_x := \{y \in Y : (x, y) \in E\}$ 属于 $\mathcal{B}_Y$; 类似地, 对每个 $y \in Y$, 集合 $E^y := \{x \in X : (x, y) \in E\}$ 属于 $\mathcal{B}_X$ 。
- 若 $f : X \times Y \rightarrow [0, +\infty]$ 是可测的, 则对每个 $x \in X$, 函数 $f_x : y \mapsto f(x, y)$ 是 $\mathcal{B}_Y$ -可测的; 类似地, 对每个 $y \in Y$, 函数 $f^y : x \mapsto f(x, y)$ 是 $\mathcal{B}_X$ -可测的。
- 若 $E \in \mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y$, 则切片 $E_x := \{y \in Y : (x, y) \in E\}$ 属于一个可数生成的 σ -代数。即存在至多可数的集合族 $\mathcal{A} = \mathcal{A}_E$ (可依赖于 E), 使得 $\{E_x : x \in X\} \subset \langle \mathcal{A} \rangle$ 。特别地, 不同切片 E_x 的数量至多为连续统的基数 c 。

命题 6.4

- 两个平凡 σ -代数 (分别定义在空间 X, Y 上) 的乘积仍是平凡的。
- 两个原子 σ -代数的乘积仍是原子的。
- 两个有限 σ -代数的乘积仍是有限的。
- 两个 Borel σ -代数 (分别定义在欧氏空间 $\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{d'}$ 上, $d, d' \geq 1$) 的乘积仍是 Borel σ -代数 (定义在 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d'} \equiv \mathbb{R}^{d+d'}$ 上)。
- 两个 Lebesgue σ -代数 (分别定义在欧氏空间 $\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{d'}$ 上, $d, d' \geq 1$) 的乘积不是 Lebesgue σ -代数。
- $\mathbb{R}^{d+d'}$ 上的 Lebesgue σ -代数是 $\mathbb{R}^d$ 与 $\mathbb{R}^{d'}$ 的 Lebesgue σ -代数乘积关于 $d + d'$ 维 Lebesgue 测度的完备化。
- 举例说明两个离散 σ -代数的乘积不一定是离散的。
- 若至少有一个域 X 或 Y 是至多可数无限的, 则两个离散 σ -代数 $2^X, 2^Y$ 的乘积仍是离散 σ -代数。

定义 6.5

称测度空间 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 是 σ -有限的, 若 X 可以写成 $\mathcal{B}$ 中可数个有限测度集合的并。

命题 6.5

令 $(X, \mathcal{B}_X, \mu_X), (Y, \mathcal{B}_Y, \mu_Y)$ 为 σ -有限测度空间, 则 $\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y$ 上存在唯一的测度 $\mu_X \times \mu_Y$ 满足对任意 $E \in \mathcal{B}_X, F \in \mathcal{B}_Y$, 有

$$\mu_X \times \mu_Y(E \times F) = \mu_X(E)\mu_Y(F)$$

命题 6.6

设 $(X, \mathcal{B}_X), (Y, \mathcal{B}_Y)$ 是可测空间。

- $(X, \mathcal{B}_X), (Y, \mathcal{B}_Y)$ 上的 Dirac 测度的积是 $(X \times Y, \mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y)$ 上的 Dirac 测度。
- 若 X, Y 是至多可数的, $(X, \mathcal{B}_X), (Y, \mathcal{B}_Y)$ 上的计数测度的积是 $(X \times Y, \mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y)$ 上的计数测度。

命题 6.7

设 $(X, \mathcal{B}_X, \mu_X), (Y, \mathcal{B}_Y, \mu_Y), (Z, \mathcal{B}_Z, \mu_Z)$ 是 σ -有限可测空间, 则

$$(\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y) \times \mathcal{B}_Z = \mathcal{B}_X \times (\mathcal{B}_Y \times \mathcal{B}_Z), (\mu_X \times \mu_Y) \times \mu_Z = \mu_X \times (\mu_Y \times \mu_Z)$$

定义 6.6

定义 X 的单调类(monotone class) 为子集族 $\mathcal{B}$ 满足:

- 若 $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ 为 $\mathcal{B}$ 的可数单增集合列, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{B}$ 。
- 若 $E_1 \supset E_2 \supset \dots$ 为 $\mathcal{B}$ 的可数单减集合列, 则 $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{B}$ 。

引理 6.1

令 $\mathcal{A}$ 为 X 上的 Boolean 代数, 则 $\langle \mathcal{A} \rangle$ 是包含 $\mathcal{A}$ 的最小单调类。

定理 6.3 (Tonelli 定理(不完备版本))

设 $(X, \mathcal{B}_X, \mu_X), (Y, \mathcal{B}_Y, \mu_Y)$ 为 σ -有限测度空间, $f: X \times Y \rightarrow [0, +\infty]$ 可测, 则:

- $x \mapsto \int_Y f(x, y) d\mu_Y(y), y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu_X(x)$ 是可测的。
- 我们有

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} f(x, y) d\mu_X \times \mu_Y(x, y) &= \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\mu_Y(y) \right) d\mu_X(x) \\ &= \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu_X(x) \right) d\mu_Y(y) \end{aligned}$$

推论 6.1

设 $(X, \mathcal{B}_X, \mu_X), (Y, \mathcal{B}_Y, \mu_Y)$ 为 σ -有限测度空间, $E \in \mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y$ 为 $\mu_X \times \mu_Y$ -零测集, 则几乎所有 $x \in X$, $E_x := \{y \in Y \mid (x, y) \in E\}$ 是 μ_Y -零测集, 几乎所有 $y \in Y$, $E_y := \{x \in X \mid (x, y) \in E\}$ 是 μ_X -零测集。

由该推论, 我们可以将 Tonelli 定理推广为其完备 $(X \times Y, \overline{\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y}, \overline{\mu_X \times \mu_Y})$ 。

定理 6.4 (Tonelli 定理(完备版本))

设 $(X, \mathcal{B}_X, \mu_X), (Y, \mathcal{B}_Y, \mu_Y)$ 为完备 σ -有限测度空间, $f: X \times Y \rightarrow [0, +\infty]$ 可测, 则

- 几乎所有 $x \in X$, $y \mapsto f(x, y)$ $\mathcal{B}_Y$ -可测, 特别的 $\int_Y f(x, y) d\mu_Y(y)$ 存在。进一步, 我们有几乎所有 $x \in X$, $x \mapsto \int_Y f(x, y) d\mu_Y(y)$ $\mathcal{B}_X$ -可测。
- 几乎所有 $y \in Y$, $x \mapsto f(x, y)$ $\mathcal{B}_X$ -可测, 特别的 $\int_X f(x, y) d\mu_X(x)$ 存在。进一步, 我们有几乎所有 $y \in Y$, $y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu_X(x)$ $\mathcal{B}_Y$ -可测。
- 我们有

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} f(x, y) d\overline{\mu_X \times \mu_Y}(x, y) &= \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\mu_Y(y) \right) d\mu_X(x) \\ &= \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu_X(x) \right) d\mu_Y(y) \end{aligned}$$

推论 6.2 (Fubini-Tonelli 定理)

设 $(X, \mathcal{B}_X, \mu_X), (Y, \mathcal{B}_Y, \mu_Y)$ 为完备 σ -有限测度空间, $f: X \times Y \rightarrow [0, +\infty]$ 可测, 若

$$\int_X \left(\int_Y |f(x, y)| d\mu_Y(y) \right) d\mu_X(x) < \infty$$

则 f 在 $\overline{\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y}$ 上绝对可积, 特别的, Fubini 定理成立。

题设条件中换成 $\int_Y \left(\int_X |f(x, y)| d\mu_X(x) \right) d\mu_Y(y)$ 结论同样成立。