交换代数笔记

zdd

2024 年 5 月 6 日

目录

1 环和理想

环与环同态

定义1.1 **环**A是具有两个二元运算**加法**和**乘法**的集合，满足：

1)A对加法是一个交换群(这样A有零元素，记为0)

2)对乘法是结合的：

$$(xy)z = x(yz)$$

且对加法是分配的：

$$x(y+z) = xy + xz$$

$$(y+z)x = yz + zx$$

在本文中提到的环都表示具有单位元的交换环.

3)对乘法是交换的：

$$xy = yx$$

且具有**单位元**(记为1)

4)$\exists 1 \in A$,使得对所有$x \in A, x1 = 1x = x$

当$1 = 0$时，A是平凡的环，它只含零元，这种环称为**零环**.

定义1.2 **环同态**f是指一个从环A映入环B的映射，满足：

1)$f(x+y) = f(x) + f(y)$

2)$f(xy) = f(x)f(y)$

3)$f(1) = 1$

环A的子集S称为A的**子环**，如果S是加法子群且对乘法封闭，并且含有A的单位元. 此时从S映入A的恒同映射是环同态.

环同态的复合也是环同态.

理想. 商环

定义1.3 环A的加法子群$\mathfrak{a}$称为A的一个**理想**，若$A\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}$. A中乘法诱导出商群$A/\mathfrak{a}$中的乘法，故$A/\mathfrak{a}$是一个环，称为**商环**.因而映射$\varphi : A \to A/\mathfrak{a}, x \to x + \mathfrak{a}$是环的满同态.

命题1.4 环A的理想$\mathfrak{a}$与$\mathfrak{b}$满足$\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$与环$A/\mathfrak{a}$的理想$\bar{\mathfrak{b}}$之间存在保持包含关系的一一对应：

$$\mathfrak{b} = \varphi^{-1}(\bar{\mathfrak{b}})$$

定义1.5 环同态$f : A \to B$的**核$\boldsymbol{f^{-1}(0)}$**是A的理想，记作$\mathbf{Ker}(\boldsymbol{f})$；$f$的**象$\boldsymbol{f(A)}$**是环$B$中的子环，记作$\mathbf{Im}(\boldsymbol{f})$.同态$f$导出环同构:

$$A/Ker(f) \cong Im(f)$$

若$x - y \in \mathfrak{a}$，可写作$x \equiv y(mod\ \mathfrak{a})$

零因子. 幂零元. 可逆元

定义1.6 i) $x \in A$ 称为**零因子**，如果$\exists y \in A, y \neq 0, xy = 0$.没有非零零因子(且$1 \neq 0$)的环叫做**整环**.如$\mathbb{Z}$和$\mathcal{K}[x_1, \ldots, x_n]$(其中$\mathcal{K}$是域而$x_1, \ldots, x_n$是无关变元)都是整环.

ii) $x \in A$称为**幂零的**，如果$\exists n \in \mathbb{N}^*, x^n = 0$.

iii) $x \in A$称为**可逆元**，如果$\exists y \in A, xy = 1$.显然y唯一，记作$\boldsymbol{x^{-1}}$.

iv) $x \in A$,称Ax或(x)为**主理想**.x是可逆元当且仅当$(x) = A = (1)$.**零理想**(0)通常记作0.

v) 若环A中$1 \neq 0$且每个非零元都是可逆元，则称A为**域**，任一域都是整环，但反之不对.

命题1.7 设A是非零环，则下述条件等价:

1)A是域.

2)A除平凡的理想(0与(1))外无别的理想.

3)任一从A映入非零环的同态都是单的.

素理想和极大理想

定义1.8 i) 环A的理想$\mathfrak{p}$称做**素理想**，若$\mathfrak{p} \neq (1)$，且可以从$xy \in \mathfrak{p}$推出$x \in \mathfrak{p}$或$y \in \mathfrak{p}$.

$$\mathfrak{p}\text{是素理想} \Longleftrightarrow A/\mathfrak{p}\text{是整环}.$$

ii) 环A的理想$\mathfrak{m}$称做**极大理想**，如果$\mathfrak{m} \neq (1)$，且不存在理想$\mathfrak{a}$满足$\mathfrak{m} \subset \mathfrak{a} \subset (1)$

$$\mathfrak{m}\text{是极大理想} \Longleftrightarrow A/\mathfrak{m}\text{是域}.$$

考虑所有不为(1)的理想的并集，可知每个非零环A都有极大理想。同样的，对于A的每个不为(1)的理想$\mathfrak{a}$，考虑所有包含$\mathfrak{a}$且不为(1)的理想的并集，可知有一个包含$\mathfrak{a}$的极大理想。(或者考虑$A/\mathfrak{a}$即可)。于是，我们有A**中任一不可逆元都包含在一个极大理想内。**

定义1.9 恰有一个极大理想$\mathfrak{m}$的环A叫做**局部环**，域$\mathcal{K} = A/\mathfrak{m}$叫做环A的**同余类域**。

命题1.10 i) 环A的理想$\mathfrak{m}$使得$A/\mathfrak{m}$中均为可逆元，则A是局部环，$\mathfrak{m}$是A的极大理想。

ii) 环A的理想$\mathfrak{m}$使得$1 + \mathfrak{m}$中均为可逆元，则A是局部环。

证明： i) 任一不为(1)的理想都由不可逆元组成，由条件它们都在$\mathfrak{m}$中，进而$\mathfrak{m}$是A中唯一的极大理想。

ii) 取$\boldsymbol{x} \in A/\mathfrak{m}$。由于$\mathfrak{m}$是极大理想，因此$\boldsymbol{x}$与$\mathfrak{m}$可以生成(1)，即存在$y \in A$和$z \in \mathfrak{m}$满足$\boldsymbol{x}y + z = 1$，进而$\boldsymbol{x}y = 1 - t \in \mathfrak{m}$，故是$\boldsymbol{x}$是可逆元，由i)即证。

定义1.11 i) 仅有有限个极大理想的环叫做**半局部环**。

ii) 所有理想都是主理想的整环称作**主理想整环(PID)**.在这种环里非零素理想都是极大的。

小根和大根

命题1.12 环A所有幂零元的集合$\mathfrak{R}$是一个理想，且环$A/\mathfrak{R}$中无非零幂零元。$\mathfrak{R}$称作环A的**小根**。

命题1.13 A的小根是A中所有素理想的交。

证明：设$\mathfrak{R}'$为A中所有素理想的交。

一方面，任意$a \in \mathfrak{R}$以及任一素理想$\mathfrak{p}$，有$n > 0$使得$a^n = 0 \in \mathfrak{p}$，由$\mathfrak{p}$是素理想得到$a \in \mathfrak{p}$，故$\mathfrak{R} \subset \mathfrak{R}'$。

另一方面，对任一非幂零元a，考虑所有对任意n均不包含a^n的理想，它们构成的集合记为Σ。$0 \in \Sigma$，再按包含关系对Σ使用Zorn引理得到Σ中的最大元$\mathfrak{p}$。设$x, y \notin \mathfrak{p}$，那么理想$\mathfrak{p} + (x)$与$\mathfrak{p} + (y)$都严格包含$\mathfrak{p}$，故不属于Σ，因此有$a^n \in \mathfrak{p} + (x), a^m \in \mathfrak{p} + (y)$，于是$a^{n+m} \in \mathfrak{p} + (xy)$，即$\mathfrak{p} + (xy) \notin \Sigma$，所以$xy \notin \mathfrak{p}$，这表示$\mathfrak{p}$是素理想且不包含$a$，因此$a \notin \mathfrak{R}'$。

定义1.14 环A的**大根**$\mathfrak{R}$为它的所有极大理想的交。

命题1.15 $x \in \mathfrak{R} \Longleftrightarrow$对任意$y \in A, 1 - xy$是可逆元。

证明："$\Longrightarrow$" 若$1 - xy$不可逆那么它就属于某个极大理想$\mathfrak{m}$，又$x \in \mathfrak{R} \subset \mathfrak{m}$，故$xy \in \mathfrak{m}$，进而$1 \in \mathfrak{m}$，矛盾！

"$\Longleftarrow$" 若$x \notin \mathfrak{m}$，任取极大理想$\mathfrak{m}$，那么x与$\mathfrak{m}$可以生成(1)，因此存在$z \in \mathfrak{m}$和$y \in A$满足$z + xy = 1$，即$1 - xy \in \mathfrak{m}$不是可逆元。

理想的运算

定义1.16 设$\mathfrak{a}$和$\mathfrak{b}$均为环A的理想，定义

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \left\{ x + y \middle| x \in \mathfrak{a}, y \in \mathfrak{b} \right\}$$
$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \left\{ \textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \middle| x_i \in \mathfrak{a}, y \in \mathfrak{b}, i = 1, 2, \ldots, n \right\}$$

这个定义满足分配律，即$\mathfrak{a}(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\mathfrak{c}$。另外如果$\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$，我们就有$\mathfrak{a} \cap (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \cap \mathfrak{c}$。若$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = (1)$，称它们是**互素**的。此时我们有$\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$(因为$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = \mathfrak{a}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) + \mathfrak{b}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$)。

定义1.17 环$A_1, A_2, \ldots, A_n$的**直积**$A = \prod_{i=1}^{n} A_i = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \middle| x_i \in A_i, i = 1, 2, \ldots, n \right\}$是一个有单位元$(1, 1, \ldots, 1)$的交换环。反过来，投影$p_i : A \to A_i$由$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto x_i$所定义是环同态。

用环A的理想们$\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2,\ldots,\mathfrak{a}_n$定义同态

$$\varphi : A \to \prod_{i=1}^n (A/\mathfrak{a}_i)$$
$$x \mapsto (x+\mathfrak{a}_1, x+\mathfrak{a}_2,\ldots,x+\mathfrak{a}_n)$$

命题1.18 i) 如果对任意$i\neq j$,$\mathfrak{a}_i$和$\mathfrak{a}_j$互素，那么$\prod\mathfrak{a}_i=\cap\mathfrak{a}_i$

ii) 同态φ是满的$\Longleftrightarrow$对任意$i\neq j$,$\mathfrak{a}_i$和$\mathfrak{a}_j$互素。

iii) 同态φ是单的$\Longleftrightarrow \cap\mathfrak{a}_i=(0)$。

命题1.19 i) 设$\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_n$是素理想，理想$\mathfrak{a}\subset\bigcup_{i=1}^n\mathfrak{p}_i$,则存在某个$i,\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{p}_i$。

ii) 设$\mathfrak{a}_1,\ldots,\mathfrak{a}_n$是理想，素理想$\mathfrak{p}\subset\bigcap_{i=1}^n\mathfrak{a}_i$,则存在某个$i,\mathfrak{p}\supseteq\mathfrak{a}_i$。

进而若$\mathfrak{p}=\prod_{i=1}^n\mathfrak{a}_i$，则存在某个$i$,$\mathfrak{p}=\mathfrak{a}_i$。

定义1.20 对环A的理想$\mathfrak{a},\mathfrak{b}$定义**商**为：

$$(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})=\left\{x\in A\middle|x\mathfrak{b}\subseteq\mathfrak{a}\right\}$$

它是一个理想。特别地，$(0:\mathfrak{b})$叫做$\mathfrak{b}$的**零化子**并记作$\mathrm{Ann}(\mathfrak{b})$。另外，如果$\mathfrak{b}$是主理想$(x)$，我们也将$(\mathfrak{a}:(x))$记作$(\mathfrak{a}:x)$。

性质1.21 i) $\mathfrak{a}\subseteq(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})$.

ii) $((\mathfrak{a}:\mathfrak{b})\mathfrak{b}\subseteq\mathfrak{a}$.

iii) $((\mathfrak{a}:\mathfrak{b}):\mathfrak{c})=(\mathfrak{a}:\mathfrak{b}\mathfrak{c})=(\mathfrak{a}:(\mathfrak{b}:\mathfrak{c}))$.

iv) $(\cap_i\mathfrak{a}_i:\mathfrak{b})=\cap_i(\mathfrak{a}_i:\mathfrak{b})$.

v) $(\mathfrak{a}:\sum_i\mathfrak{b}_i)=\cap_i(\mathfrak{a}:\mathfrak{b}_i)$.

定义1.22 环A的理想$\mathfrak{a}$的**根**定义为集合：

$$r(a)=\left\{x\in A\middle|x^n\in\mathfrak{a},n>0\right\}$$

若$\varphi:A\to A/\mathfrak{a}$是自然同态，那么$r(a)=\varphi^{-1}(\Re_{A/\mathfrak{a}})$，故它是理想。

性质1.23 i) $r(\mathfrak{a})\supseteq\mathfrak{a}$.

ii) $r(r(\mathfrak{a}))=r(\mathfrak{a})$.

iii) $r(\mathfrak{a}\mathfrak{b})=r(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})=r(\mathfrak{a})\cap r(\mathfrak{b})$.

iv) $r(\mathfrak{a})=(1)\Leftrightarrow\mathfrak{a}=(1)$.

v) $r(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})=r(r(\mathfrak{a})+r(\mathfrak{b}))$.

vi) 若$\mathfrak{p}$是素理想，那么$r(\mathfrak{p}^n)=r(\mathfrak{p})$对一切$n>0$成立.

命题1.24 理想$\mathfrak{p}$的根是包含$\mathfrak{p}$的一切素理想的交。

证明：对$A/\mathfrak{a}$同**命题1.13**证明即可。

命题1.25 $D=A$中零因子的集合$=r(D)=r(\cup_{x\neq 0}\mathrm{Ann}(x))=\cup_{x\neq 0}r(\mathrm{Ann}(x))$

命题1.26 若环A的理想$\mathfrak{a},\mathfrak{b}$的根$r(\mathfrak{a})$和$r(\mathfrak{b})$互素，则$\mathfrak{a},\mathfrak{b}$互素。

扩张和局限

定义1.27 设$f:A\to B$是环同态，$\mathfrak{a}$是A的理想，则$\mathfrak{a}$的象$f(\mathfrak{a})$在B中生成的理想$Bf(\mathfrak{a})$叫做理想$\mathfrak{a}$的**扩理想**$\mathfrak{a}^e$。B的理想$\mathfrak{b}$的**局限理想**$\mathfrak{b}^c$定义为$f^{-1}(\mathfrak{b})$。$\mathfrak{b}$是素理想可以推出$\mathfrak{b}^c$是素理想，但是$\mathfrak{a}$是素理想不能推出$\mathfrak{a}^e$是素理想。

性质1.28 i) $\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{a}^{ec}$，$\mathfrak{b}\supseteq\mathfrak{b}^{ce}$.

ii) $\mathfrak{a}^e=\mathfrak{a}^{ece}$，$\mathfrak{b}^c=\mathfrak{b}^{cec}$.

iii) 设C包含B中所有理想的局限理想，设E包含A中所有理想的扩张理想。则

$$C=\left\{\mathfrak{a}\middle|\mathfrak{a}^{ec}=\mathfrak{a}\right\},E=\left\{\mathfrak{b}\middle|\mathfrak{b}^{ce}=\mathfrak{b}\right\}。$$

而$\mathfrak{a}\mapsto\mathfrak{a}^e$是$C$到$E$的一一映射，它的逆是$\mathfrak{b}\mapsto\mathfrak{b}^c$。

性质1.29 设$\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2$是$A$中的理想，$\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2$是$B$中的理想，那么：

$$\begin{aligned}(\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2)^e=\mathfrak{a}_1^e+\mathfrak{a}_2^e，&\quad(\mathfrak{b}_1+\mathfrak{b}_2)^c\supseteq\mathfrak{b}_1^c+\mathfrak{b}_2^c\\(\mathfrak{a}_1\cap\mathfrak{a}_2)^e\subseteq\mathfrak{a}_1^e\cap\mathfrak{a}_2^e，&\quad(\mathfrak{b}_1\cap\mathfrak{b}_2)^c=\mathfrak{b}_1^c\cap\mathfrak{b}_2^c\\(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2)^e=\mathfrak{a}_1^e\mathfrak{a}_2^e，&\quad(\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2)^c\supseteq\mathfrak{b}_1^c\mathfrak{b}_2^c\\(\mathfrak{a}_1:\mathfrak{a}_2)^e\subseteq\mathfrak{a}_1^e:\mathfrak{a}_2^e，&\quad(\mathfrak{b}_1:\mathfrak{b}_2)^c\subseteq\mathfrak{b}_1^c:\mathfrak{b}_2^c\\r(\mathfrak{a})^e\subseteq r(\mathfrak{a}^e)，&\quad r(\mathfrak{b})^c=r(\mathfrak{b}^c)\end{aligned}$$

习题

1. 设x是环A中幂零元，证明$1+x$是A的可逆元，由此推出幂零元和可逆元的和是可逆元。

证明： 存在$n, x^n=0$,则$(1+x)(1-x+\cdots+(-1)^{n-1}x^{n-1})=1+(-1)^n x^n=1$，故$1+x$可逆。

设a是可逆元，则$(a^{-1}x)^n=a^{-n}x^n=0$，即$a^{-1}x$为幂零元，由上知$1+a^{-1}x$可逆，故$a+x=a(1+a^{-1}x)$为可逆元之积可逆。

2. A是环，$A[x]$是对应的多项式环。令$f=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n\in A[x]$，证明：

i) f是$A[x]$中可逆元$\Longleftrightarrow a_0$是A中可逆元，且$a_1,a_2,\ldots,a_n$是幂零元。

ii) f幂零$\Longleftrightarrow a_0,a_1,\ldots,a_n$幂零。

iii) f是零因子$\Longleftrightarrow$ 存在环A的非零元a使得$af=0$

iv)如果$(a_0,a_1,\ldots,a_n)=(1)$,f就叫做**本原多项式**，证明，如果$f,g\in A[x]$，那么fg本原$\Longleftrightarrow$ f和g都是本原

证明： i)f可逆$\Longleftrightarrow$存在$g=\sum_{j=0}^m b_jx^j\in A[x]$使得$fg=\sum_{i=0}^n a_ix^i\sum_{j=0}^m b_jx^j=1$

“$\Longrightarrow$” 若f可逆，则$1=[x^0]fg=a_0b_0\Longrightarrow a_0,b_0$可逆

$0=[x^{n+m}]fg=a_nb_m$

$0=[x^{n+m-1}]fg\Longrightarrow 0=a_n\cdot[x^{n+m-1}]fg=a_n(a_nb_{m-1}+a_{n-1}b_m)=a_n^2b_{m-1}$

$0=[x^{n+m-1}]fg\Longrightarrow 0=a_n^2\cdot[x^{n+m-1}]fg=a_n^2(a_nb_{m-2}+a_{n-1}b_{m-1}+a_{n-2}b_m)=a_n^3b_{m-2}$

$\ldots$

$0=[x^{n+m-r}]fg\Longrightarrow 0=a_n^r\cdot[x^{n+m-r}]fg=a_n^r(a_nb_{m-r}+\cdots+a_{n-r}b_m)=a_n^{r+1}b_{m-r}$

$\ldots$

$0=[x^n]fg\Longrightarrow 0=a_n^m\cdot[x^n]fg=a_n^m(a_nb_0+\ldots)=a_n^{m+1}b_0$，又$b_0$可逆，故$a_n$是幂零的。

由**1.**知$f-a_nx^n$也是可逆的，继续如上证明可依次得到$a_{n-1},a_{n-2},\ldots,a_1$均是幂零的。

“$\Longleftarrow$” 设$a_i^{k_i}=0$，则$(\sum_{i=1}^n a_ix^i)^{\sum_{i=1}^n k_i}=0$。$a_0$可逆且$\sum_{i=1}^n a_ix^i$幂零，由**1.**知$f$可逆。

ii) “$\Longleftarrow$” $f^{\sum_{i=0}^n k_i}=(\sum_{i=0}^n a_ix^i)^{\sum_{i=0}^n k_i}=0$故幂零。

“$\Longrightarrow$”设$f^m=0$，则$0=[x^{nm}]f^m=a_n^m$故a_n幂零。进而$f-a_nx^n$也是幂零的，继续如上证明可依次得到$a_{n-1},a_{n-2},\ldots,a_0$均是幂零的。

iii)“$\Longrightarrow$”设$g=\sum_{j=0}^m b_jx^j\in A[x]$是使得$fg=\sum_{i=0}^n a_ix^i\sum_{j=0}^m b_jx^j=0$且$m$最小的一个$g$。

$0=[x^{n+m}]fg=a_nb_m$，进而$a_ng=0$否则a_ng是次数更小的满足要求的多项式。

$0=[x^{n+m-1}]fg=a_nb_{m-1}+a_{n-1}bm=a_{n_1}b_m$，同上可知$a_{n-1}g=0$。

$\ldots$

$0=a_0b_m$，至此，我们有$fb_m=0$

“$\Longleftarrow$”是显然的。

iv)“$\Longrightarrow$”$(1)=(a_0b_0,a_0b_1+a_1b_0,\ldots)\subseteq(a_0,a_0b_1,a_1b_0,\ldots)=(a_0,a_1b_0,\ldots)\subseteq(a_0,a_1,\ldots)=\cdots=(a_0,a_1,\ldots,a_n)\subseteq(1)$，因此$(a_0,a_1,\ldots,a_n)=(1)$，故$f$是本原的，$g$同理。

“$\Longleftarrow$”若fg不是本原的，设$(1) \supsetneq I = (a_0b_0, a_0b_1 + a_1b_0, \dots)$，取包含$I$的极大理想$I_{max}$。

考虑域A/I_{max}上的多项式整环$(A/I_{max})[x]$中的元素

$$F = f + I_{max} = \textstyle\sum_{i=0}^{n}(a_i + I_{max})x^i$$
$$G = g + I_{max} = \textstyle\sum_{j=0}^{m}(b_j + I_{max})x^j$$

因为$(a_0b_0, a_0b_1 + a_1b_0, \dots) \subseteq I_{max}$，故$FG = (a_0b_0 + I_{max}) + (a_0b_1 + a_1b_0 + I_{max})x + \cdots = 0$，进而$F = 0$或$G = 0$，不妨是前者。这表示$a_i \in I_{max}$对$i = 0, 1, \dots, n$均成立，这与$(a_0, a_1, \dots, a_n) = (1)$矛盾！

3. 推广**2.**至环$A[x_1, \dots, x_r]$上。

设$f = \sum_{i_1,i_2,\cdots,i_r} a_{i_1,i_2,\dots,i_r} x_1^{i_1}x_2^{i_2}\dots x_r^{i_r}$

断言： i)f可逆$\Longleftrightarrow a_{0,0,\dots,0}$可逆且$a_{i_1,i_2,\dots,i_r}$幂零，其中$i_1, i_2, \dots, i_r$不全为零。

ii)f幂零$\Longleftrightarrow a_{i_1,i_2,\dots,i_r}$幂零，对于任意的$i_1, i_2, \dots, i_r$。

iii)iv)均同**2.**

证明： 均将$A[x_1, \dots, x_r]$视为$A[x_1, \dots, x_{r-1}][x_r]$利用**2.**归纳即可。

4. 在环$A[x]$中，大根与小根重合。

证明： 由**2.**与**命题1.15**，小根$\mathfrak{R} = \left\{f = \sum_i a_ix^i \middle| a_i幂零\right\}$，大根$\mathfrak{R} = \left\{g = \sum_j b_jx^j \middle| \forall h \in A[x], 1 + gh可逆\right\}$

一方面，任取$f \in \mathfrak{R}$，由于f幂零，则$\forall h \in A[x]$，fh也幂零。由**1.**知$1+fh$可逆，因此$\mathfrak{R} \subset \mathfrak{R}$。

另一方面，任取$g \in \mathfrak{R}$，取$h = x \in A[x]$，则$1 + xg$可逆，由**2.**知b_j均幂零，因此$\mathfrak{R} \subset \mathfrak{R}$。

5. 设A是环，$A[[x]]$是A上的形式幂级数，设$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \in A[[x]]$，证明：

i)f是$A[[x]]$中可逆元$\Longleftrightarrow a_0$是A中可逆元。

ii)如果f幂零，则对一切$n \geq 0$，a_n都幂零。逆命题是否成立？

iii)f属于环$A[[x]]$的大根$\Longleftrightarrow a_0$属于环A的大根。

iv)环$A[[x]]$中任一极大理想$\mathfrak{m}$对A的局限理想都是A中的极大理想，而$\mathfrak{m}$由$\mathfrak{m}^c$和x生成。

v)A中任一素理想都是$A[[x]]$中一个素理想的局限理想。

证明： i)“$\Longrightarrow$”是显然的。

“$\Longleftarrow$”设$g = \sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n \in A[[x]]$，我们来求解满足$fg = 1$的$g$。

$$\begin{cases} 1 = [x^0]fg = a_0b_0 \Longrightarrow b_0 = a_0^{-1} \\ 0 = [x^n]fg = a_0b_n + \sum_{i=1}^{n} a_ib_{n-i} \Longrightarrow b_n = -a_0^{-1}\sum_{i=1}^{n} a_ib_{n-i}, n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

这样我们便确定了唯一的g。因此f可逆。

ii)与$A[x]$上的情形相同，不再赘述。

iii)f属于环$A[[x]]$的大根$\Longleftrightarrow \forall g=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \in A[[x]], 1+fg$可逆

$\Longleftrightarrow \forall b_0 \in A, 1+a_0b_0$是$A$中可逆元$\Longleftrightarrow a_0$属于环$A$的大根。

iv)$\mathfrak{m}^c=\mathfrak{m}\cap A$，若$\mathfrak{m}^c$不是极大的，取极大理想$I_{max}\supsetneq \mathfrak{m}^c$。

则$(I_{max},x)\supsetneq \mathfrak{m}$且$(I_{max},x)^c=I_{max}$，所以$(I_{max},x)\neq A[[x]]$，这与$\mathfrak{m}$是极大的矛盾。

由$\mathfrak{m}^c=\mathfrak{m}\cap A$可知$\mathfrak{m}^c$是$\mathfrak{m}$中所有常数项的集合。因此$(\mathfrak{m}^c,x)$是所有常数项属于$\mathfrak{m}^c$的形式幂级数，自然包含$\mathfrak{m}$。再由$\mathfrak{m}$的极大性，可知$\mathfrak{m}=(\mathfrak{m}^c,x)$。

v)设$\mathfrak{p}$是A中的素理想，则$\mathfrak{p}=(\mathfrak{p},x)\cap A=(\mathfrak{p},x)^c$。下证$(\mathfrak{p},x)$是$A[[x]]$的素理想。

设$f=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, g=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$，$fg=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+\cdots\in(\mathfrak{p},x)$。

则$a_0b_0\in\mathfrak{p}$，所以$a_0\in\mathfrak{p}$或$b_0\in\mathfrak{p}$，进而$f\in(\mathfrak{p},x)$或$g\in(\mathfrak{p},x)$。

6. 假定环A中任一不含在小根中的理想都包含非0幂等元，证明，A的小根与大根重合。

证明： 显然$\mathfrak{R}\subset\mathfrak{R}$。若$\mathfrak{R}\subsetneq\mathfrak{R}$，由定义，存在幂等元$x\in\mathfrak{R}$，则$\forall y\in A$，$1+xy$是可逆元。取$y=-1$我们得到$1-x$是可逆元。但是$x(1-x)=x-x^2=0$矛盾！

7. 设环A中任意元素x都适合$x^n=x$对某个$n>1$，证明A中任一素理想都极大。

证明： 设$\mathfrak{p}$是素理想。若不然$A/\mathfrak{p}$中有不可逆元$\bar{x}=x+\mathfrak{p}$。

但$\bar{x}^n=x^n+\mathfrak{p}=x+\mathfrak{p}=\bar{x}$，故$\bar{x}^{n-1}=1$，这与它不可逆矛盾！

8. 设A是非零环，证明A中素理想的集合有一个极小元素。

证明： 由Zorn引理，我们只需证明对于任一个素理想的降链$\{\mathfrak{p}_\alpha\}$，$\cap_\alpha\mathfrak{p}_\alpha=\mathfrak{p}$也是素理想。

设$xy\in\mathfrak{p}$，对任意的α，$x\in\mathfrak{p}_\alpha$或$y\in\mathfrak{p}_\alpha$。若$x\notin\mathfrak{p}$，则存在α使得$x\notin\mathfrak{p}_\alpha$。

对于任意的β，若$\mathfrak{p}_\alpha\subset\mathfrak{p}_\beta$，则$y\in\mathfrak{p}_\alpha\subset\mathfrak{p}_\beta$；若$\mathfrak{p}_\alpha\supset\mathfrak{p}_\beta$，则$x\notin\mathfrak{p}_\beta$，只能$y\in\mathfrak{p}_\beta$。由上可知$y\in\mathfrak{p}$。于是$\mathfrak{p}$是素理想。

9. 设$\mathfrak{a}\neq(1)$是环A中的理想。证明$\mathfrak{a}=r(\mathfrak{a})\Longleftrightarrow\mathfrak{a}$是素理想。

证明： $\mathfrak{a}=r(\mathfrak{a})\Longleftrightarrow\forall x\notin\mathfrak{a},\forall n,x^n\notin\mathfrak{a}\Longleftrightarrow A/\mathfrak{a}$中无非零幂零元$\Longleftrightarrow\mathfrak{R}_{A/\mathfrak{a}}=0$。

设$f:A\to A/\mathfrak{a}$是自然同态。$\mathfrak{R}_{A/\mathfrak{a}}=0\Longleftrightarrow\mathfrak{a}=f^{-1}(0)=f^{-1}\left(\bigcap\limits_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a})}\mathfrak{p}\right)=\bigcap\limits_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a})}f^{-1}(\mathfrak{p})$是一些素理想的交。

10. 设A是环，$\mathfrak{R}$是它的小根，证明下列诸断言等价：

i)A恰好只有一个素理想。

ii)A中任意元素或者是可逆元，或者是幂零元。

iii)$A/\mathfrak{R}$是域。

证明： i)$\Longrightarrow$iii) 对于包含$\mathfrak{R}$的极大理想$\mathfrak{m}$，则$\mathfrak{m}$是素的，进而$\mathfrak{p}=\mathfrak{m}$，故$A/\mathfrak{R}$是域。

iii)$\Longrightarrow$i)$A/\mathfrak{R}$是域可知$\mathfrak{R}$是极大理想，对于任一素理想$\mathfrak{p}, p\subset\mathfrak{R}\Longrightarrow\mathfrak{p}=\mathfrak{R}$，即$A$有唯一素理想。

iii)$\Longrightarrow$ii)$A/\mathfrak{R}$是域可知$\forall x\in A$，要么$x\in\mathfrak{R}$，要么$x+\mathfrak{R}$可逆，即x可逆。

ii)$\Longrightarrow$iii)因此A中除了$\mathfrak{R}$中的元素均可逆，即得$A/\mathfrak{R}$中非零元均可逆。

11. 环A叫做**Boole环**如果$x^2=x$对一切$x\in A$。在Boole环中证明：

i)$2x=0$对一切$x\in A$

ii)任意素理想$\mathfrak{p}$均极大，而$A/\mathfrak{p}$是由两个元素组成的域。

iii)任一具有有限个生成元的理想A都是主理想。

证明： i)$2x=x+x=(x+x)^2=4x^2=4x\Longrightarrow 2x=0$

ii)同**7.**所证，$A/\mathfrak{p}$中元素$\bar{x}$满足$\bar{x}(\bar{x}-1)=\mathfrak{p}\Longrightarrow\bar{x}=\mathfrak{p}$或$1+\mathfrak{p}$。

iii)只需证二元情形。注意到$(x+y-xy)x=x$与$(x+y-xy)y=y$可知$(x,y)=(x+y-xy)$。

12. 局部环里除了0和1之外没有别的幂等元。

证明： 设$x^2=x$，则$x(x-1)=0$。若x不为0和1，则x和$x-1$均为零因子。又x与$x-1$至多一个在A的唯一极大理想$\mathfrak{m}$中，不妨是后者。则理想(x)是极大的，与$\mathfrak{m}$的唯一性矛盾！

域的代数闭包的造法(E.Artin)

13. 设K是域，Σ是系数属于K的，首项系数等于1的一个未定元的不可约多项式f的全体所组成的集合。对每个$f\in\Sigma$，相应一个未定元x_f。用A表这些未定元x_f在K上生成的多项式环。由$\mathfrak{a}$表由所有的多项式$f(x_f)$，对一切$f\in\Sigma$，在A中生成的理想。证明$\mathfrak{a}\neq(1)$。

设$\mathfrak{m}$是A中的一个包有$\mathfrak{a}$的极大理想，并令$K_1=A/\mathfrak{m}$。那么K_1是K的扩域，在其中每个多项式$f\in\Sigma$都有根。对K_1重复对K的作法，得到域K_2，等等。令$L=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}K_n$。那么$L$是域，在其中每个多项式$f\in\Sigma$都分解成线性因式之积。用$\vec{K}$表$L$中在$K$上代数的那些元素的集合。那么$\bar{K}$是$K$的代数闭包。

证明： 若不然，$1=\sum_{i=1}^{n} g_i f_i(x_{f_i})$，其中$g_i \in A, f_i \in \Sigma$。

考虑K的环扩张$E=K[x_{f_1},\ldots,x_{f_n}]/(f_1(x_{f_1})\ldots,f_n(x_{f_n}))$，在$E$上取$\alpha_i$使$f_i(\alpha_i)=0$，令$x_{f_i}=\alpha_i$带回上式得到$1=0$，矛盾！

14. 用Σ表环A中完全由零因子组成的理想的全体所组成的集合。证明Σ有一个极大元，而且Σ的每个极大元都是素理想。因此A中零因子的集合是素理想的并。

证明： 对于任一个Σ中的升链$\{\mathfrak{m}_\alpha\}$，设$\cup_\alpha \mathfrak{m}_\alpha=\mathfrak{m}$。对任意$x\in\mathfrak{m}$，存在$\alpha$使$x\in\mathfrak{m}_\alpha$，进而对任意$y\in A$，$xy\in\mathfrak{m}_\alpha\subset\mathfrak{m}$。再取$z\in\mathfrak{m}_\beta\subset\mathfrak{m}$，不妨$\mathfrak{m}_\alpha\subset\mathfrak{m}_\beta$，则$x+z\in\mathfrak{m}_\alpha\subset\mathfrak{m}$。故$\mathfrak{m}$是理想。由Zorn引理知$\Sigma$中有极大元，记为$\mathfrak{M}$。

若$xy\in\mathfrak{M}$，则x,y至少有一零因子，不妨是x。由于$\mathfrak{M}\subset(\mathfrak{M},x)\in\Sigma$，故$(\mathfrak{M},x)=\mathfrak{M}$，即$x\in\mathfrak{M}$，进而$\mathfrak{M}$是素理想。

对于任一零因子a，设Σ_a是Σ中包含a的那些理想，同上可知Σ_a有极大元且是素理想，这就得出了最后一个结论。

2 模

模和模同态

定义2.1 设A是一个交换环，M是一个交换群，如果A线性地作用在它上面，就叫做一个A-**模**。确切地说，模是一个对(M,μ)，这里M是交换群，而μ是个映射$A\times M\to M$，它们满足以下公理，其中我们把$\mu(a,x)(a\in A,x\in M)$写作ax：

$$
\begin{gathered}
a(x+y)=ax+by，\\
(a+b)x=ax+bx，\\
(ab)=a(bx)，\\
1x=x。
\end{gathered}
$$

一个等价的定义是：M是交换群且有环同态$A\to\mathrm{Aut}(M)$。

定义2.2 设M和N是两个A-模，映射$f:M\to N$叫做A-**模同态**，如果对一切$a\in A$和$x,y\in M$：

$$
\begin{gathered}
f(x+y)=f(x)+f(y)，\\
f(ax)=af(x)，
\end{gathered}
$$

A-模同态的复合仍然是A-模同态。

定义2.3 从M到N中的所有A-模同态所成的集合可以成为一个A-模，如果按以下公式定义$f+g$和af：

$$
\begin{gathered}
(f+g)(x)=f(x)+g(x)\\
(af)(x)=af(x)
\end{gathered}
$$

对一切$x\in M$。这个A-模记作$\mathrm{Hom}_A(M,N)$，在无歧义的情况下可以简记为$\mathrm{Hom}(M,N)$。

同态$u:M'\to M$和$v:N\to N'$导出映射：

$$
\begin{gathered}
\bar{u}:\mathrm{Hom}(M,N)\to\mathrm{Hom}(M',N)\\
f\mapsto f\circ u\\
\bar{v}:\mathrm{Hom}(M,N)\to\mathrm{Hom}(M,N')\\
f\mapsto v\circ f
\end{gathered}
$$

这两个映射都是A-模同态。

对任意A-模M，有自然同构$\mathrm{Hom}(A,M)\cong M$：每个A-模同态$f:A\to M$由元素$f(1)$所唯一确定，而这个元素可以任意选取。

子模和商模

定义2.4 模M的**子模**M'是M的子群，它对A的元素乘法封闭。再在交换群M/M'上按公式

$$a(x+M')=ax+M'$$

来定义乘法，A-模的结构就搬到商群M/M'上来。A-模M/M'叫做M对于M'的**商模**。从M到M/M'的自然映射是A-模同态。在M的包含M'的子模所构成的集合与M/M'的子模的集合之间由保持包含关系的一一对应。

定义2.5 $f:M\to N$是A-模同态，**核**定义为集合$\mathrm{Ker}(f)=\left\{x\in M\middle|f(x)=0\right\}$，它是$M$的子模。

象定义为集合$\mathrm{Im}(f)=f(M)$，它是N的子模。

余核定义为集合$\mathrm{Coker}(f)=N/\mathrm{Im}(f)$，它是$N$的商模。

设M'是M的子模，$M'\subseteq \mathrm{Ker}(f)$，那么$f$诱导同态$\bar f:M/M'\to N$，$x+M'\mapsto f(x)$，$\bar f$的核是$\mathrm{Ker}(f)/M'$。特别的，令$M\prime=\mathrm{Ker}(f)$，我们有一个$A$-模同构$M/\mathrm{Ker}(f)\cong \mathrm{Im}(f)$。

子模上的运算

定义2.6 设M是个A-子模，定义$(M_i)_{i\in I}$的**和**$\sum M_i$为所有$\sum x_i$的集合，其中$x_i\in M_i, i\in I$且只有有限个非零。它是M的包含所有M_i的最小子模。

定义它们的**交**$\bigcap M_i$也是M的子模。

定义A的理想$\mathfrak{a}$和A-模M的**积**$\mathfrak{a}M$为一切可能的有限和$\sum a_ix_i$的集合，其中$a_i\in\mathfrak{a}, x_i\in M$，它是$M$的子模。

定义M两个子模N,P的**商**$(N:P)=\left\{a\middle|aP\subseteq N, a\in A\right\}$，它是$A$的理想。特别的，$(0:M)$叫做$M$的**零化子**并记作$\mathrm{Ann}(M)$。如果理想$\mathfrak{a}\subseteq\mathrm{Ann}(M)$，那么通过定义$\bar x m=xm, x\in A, \bar x=x+\mathfrak{a}$，$M$可以看作一个$A/\mathfrak{a}$-模。

A-模M是**忠实的**，如果$\mathrm{Ann}(M)=0$。因此M看作$A/\mathrm{Ann}(M)$-模是忠实的。

命题2.7 i)设$L\supseteq M\supseteq N$，它们都是A-模，那么$(L/N)/(M/N)\cong L/M$。

ii)设M_1,M_2是M的子模，那么$(M_1+M_2)/M_1\cong M_2/(M_1\cap M_2)$。

iii) $\mathrm{Ann}(M+N)=\mathrm{Ann}(M)\cap\mathrm{Ann}(N)$。

iv)$(N:P)=\mathrm{Ann}((N+P)/N)$。

证明： i)考虑满同态$\varphi:L/N\to L/M, x+N\to x+M$，它的$\mathrm{Ker}=M/N$。

ii)考虑同态的合成$M_2\to M_1+M_2\to(M_1+M_2)/M_1$是满的，它的$\mathrm{Ker}=M_1\cap M_2$。

定义2.8 设x是M的任意一个元素，所有它的倍元$ax(a\in A)$的集合是M中的一个子模，记作Ax或(x)。如果$M=\sum\limits_{i\in I}Ax_i$，那么$x_i$这组元素叫做$M$的**一组生成元**，$A$-模$M$叫做**有限生成的**。

直和与直积

定义2.9 定义A-模M,N的直和$M\oplus N=\left\{(x,y)\middle|x\in M,y\in N\right\}$，它就成为一个$A$-模。

更一般的，定义$\bigoplus\limits_{i\in I}M_i=\left\{(x_i)_{i\in I}\middle|x_i\in M_i,i\in I,\text{且仅有有限个}x_i\text{非零}\right\}$。去除有限个非零的条件就得到直积$\prod\limits_{i\in I}M_i$。

假定环A是个直积$\prod\limits_{i=1}^{n}A_i$，$\mathfrak{a}_i=\left\{(0,\dots,0,a_i,0,\dots,0)\middle|a_i\in A_i\right\}$是$A$的理想。环$A$看成$A$-模就是理想$\mathfrak{a}_1,\dots,\mathfrak{a_n}$的直和。反过来，若$A=\mathfrak{a}_1\oplus\dots\mathfrak{a}_n$，则$A\cong\prod\limits_{i\in I}A/\mathfrak{b}_i$，其中$\mathfrak{b}_i=\bigoplus\limits_{j\neq i}\mathfrak{a_j}$

有限生成的模

定义2.10 **自由**A-模是同构于形如$\bigoplus\limits_{i\in I}M_i$的$A$-模的一个$A$-模。这里所有$M_i$都同构于$A$，有时记作$A^{(I)}$。因此有限生成的自由$A$-模同构于$A^n$。

命题2.11 A-模M是有限生成+的$\Longleftrightarrow M$同构于模A^n的一个商模，对某个$n>0$。

命题2.12 设M是有限生成的A-模，$\mathfrak{a}$是A的一个理想，φ是A-模M的一个自同态，使$\varphi(M)\subseteq\mathfrak{a}M$，那么$\varphi$满足：$\varphi^n+a_1\varphi^{n-1}+\cdots+a_n=0$，其中$a_i\in\mathfrak{a}$

推论2.13 设M是有限生成的A-模，$\mathfrak{a}$是A的一个理想，且$\mathfrak{a}M=M$，则有一个$x\equiv1(mod\ \mathfrak{a})$使得$xM=0$

命题2.14 (Nakayama引理)设M是有限生成的A-模，$\mathfrak{a}$是包含在A的大根$\mathfrak{R}$中的理想，如果$\mathfrak{a}M=M$，则$M=0$

推论2.15 设M是有限生成的A-模，N是M的一个子模，$\mathfrak{a}$是A的一个包含在$\mathfrak{R}$中的理想，则$M=\mathfrak{a}M+N\Longrightarrow M=N$

证明：将**命题2.14**应用于M/N并结合$\mathfrak{a}(M/N)=(\mathfrak{a}M+N)/N$即可。

命题2.16 设$x_i(1\le i\le n)$是M的一组元素，它们在$M/\mathfrak{m}M$中的象组成这个向量空间的一组基，那么x_i生成M。

正合序列

定义2.17 一个A-模和A-同态的序列

$$\cdots \to M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \to \dots \tag{0}$$

叫做**在M_i处正合**，如果$\mathrm{Im}(f_i) = \mathrm{Ker}(f_{i+1})$。如果它在每个$M_i$处都正合，则称它为正合序列。

特别的，

$$0 \to M' \xrightarrow{f} M \text{ 正合 } \iff f \text{ 是单的} \tag{1}$$

$$M \xrightarrow{g} M'' \to 0 \text{ 正合 } \iff g \text{ 是满的} \tag{2}$$

$$0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0 \text{ 正合 } \iff f \text{ 是单的}, g \text{ 是满的} \tag{3}$$

$x^n + y^n = z^n$

3 分式环和分式模

4 准素分解

5 整相关性和赋值

6 链条件

7 Noether环

8 Artin环

9 离散赋值和Dedekind整环

10 完备化

11 维数理论